TECHNIUM
BOOKS

Ionut Cristian Scurtu

MECANICA
NOTE DE CURS

ISBN 978-606-95069-9-8

Technium Press
2023

Obiectul mecanicii

Mecanica este o ştiinţă fundamentală a naturii, care descrie şi stabileşte condiţiile de mişcare şi de repaus pentru corpurile aflate sub acţiunea diferitelor forţe.

Este ştiinţa naturii care se ocupă cu studiul echilibrului şi al mişcării corpurilor materiale. Acestea pot fi planete, corpuri macroscopice, molecule sau atomi, ce pot fi modelate drept puncte materiale, sisteme de puncte materiale sau corpuri rigide.

Prin mișcare mecanică deducem cea mai simplă formă de mișcare a materiei și a corpurilor macroscopice. Această mișcare impune deplasarea relativă a corpurilor materiale sau a părților acestora, în raport cu alt corp.

Noțiuni fundamentale

Spaţiul

Spațiul este o formă obiectivă de existenţă a materiei, care caracterizează dimensiunile şi întinderea obiectelor materiale. El exprimă ordinea coexistenţei corpurilor, mărimea, forma acestora. Proprietățile spațiului au fost un subiect controversat al învățaților tuturor timpurilor. Ele variază în funcție de gradul de dezvoltare al cunoștințelor acumulate de omenire de-a lungul diverselor perioade istorice. El este infinit, tridimensional, continuu, omogen si izotrop.

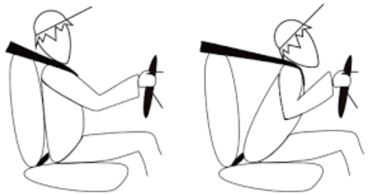
Timpul

Timpul este un concept fără de care nu ne putem imagina desfășurarea niciunei acțiuni. Acesta este nelimitat, continuu, omogen si ireversibil.

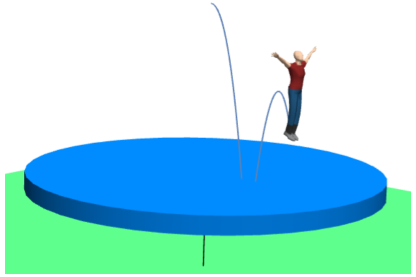
Principiile mecanicii clasice

Exista cateva principii ale mecanicii.

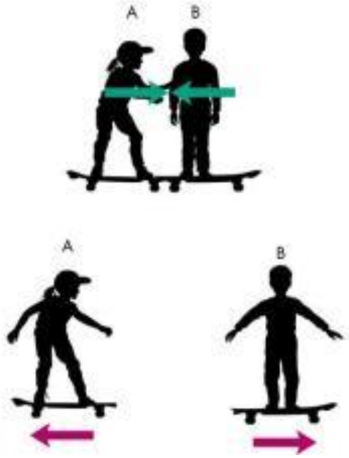
1. Principiul inerţiei, care afirmă că orice corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, atâta timp cât nu intervin alte forţe care să-i modifice această stare;

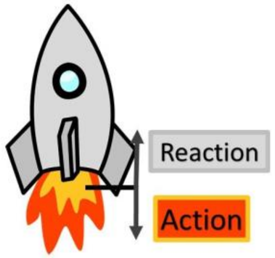


2. Principiul acţiunii forţei: variaţia mişcării este proporţională cu forţa motoare imprimată şi este dirijată pe linia de acţiune a forţei

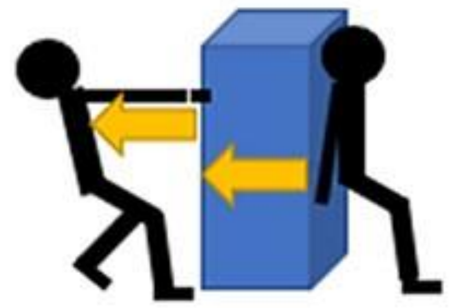


3. Principiul acţiunii şi reacţiunii: la orice acţiune îi corespunde o reacţiune de aceeaşi direcţie, cu acelaşi modul, dar de sens contrar;





4. Principiul paralelogramului forţelor: dacă asupra unui punct acţionează două forţe, efectul lor este acelaşi ca şi când asupra punctului ar acţiona o singură forţă , având mărimea şi sensul diagonalei paralelogramului construit pe cele două forţe ca laturi.



The **object** is the box; the **external agents** are the two men; and the **applied forces** are a push and pull.

Mărimi fizice și unități de măsură

O însuşire a unei mulţimi de obiecte de aceeaşi natură poate fi o mărime fizică, dacă sunt îndeplinite următoarele trei condiţii:

a) există posibilitatea stabilirii unei relaţii de echivalenţă între obiectele care posedă respectiva însuşire şi, astfel, aceste obiecte se împart în clase de echivalenţă

b) există posibilitatea stabilirii unei relaţii de ordine între clasele de echivalenţă, pentru a putea face comparaţie între ele

c) există posibilitatea stabilirii unui criteriu de comparaţie (de câte ori o clasă este mai mare decât alta).

Mărimile fizice se împart în:

1. Mărimi fizice primitive sau fundamentale: metrul, kilogramul, secunda.
2. Mărimi fizice derivate: m/s, m^2, etc.

Legături mecanice

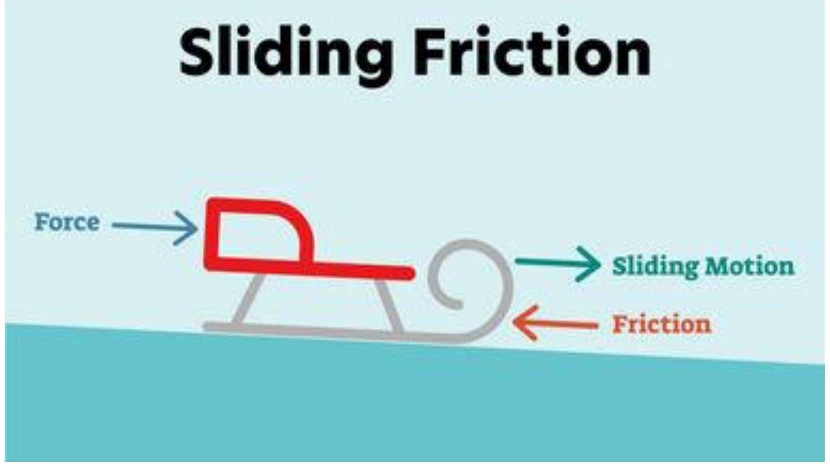
Dacă mobilitatea unui sistem mecanic este supusă anumitor restricţii, se foloseşte formularea de sistem (punct material, solid rigid) supus la legături. De exemplu, un punct material poate fi obligat să se mişte pe o curbă sau pe o suprafaţă, mişcarea lui fiind, în acest caz, o mişcare constrânsă sau supusă la legături.

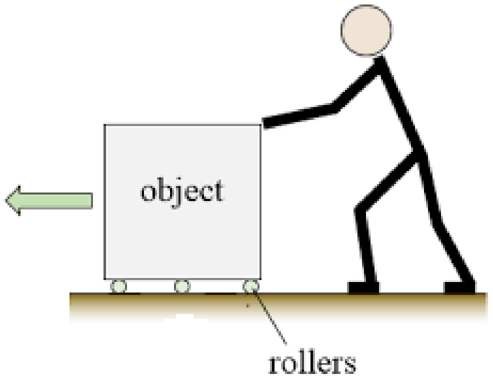
Curbele sau suprafeţele pe care trebuie să rămână punctul se numesc constrângeri. În cazul general, legătura mecanică poate fi definită ca fiind o formă de interacţiune care impune anumite restricţii parametrilor de poziţie ai punctului material respectiv solidului rigid, uneori şi derivatelor, în raport cu timpul, ale acestor parametri.

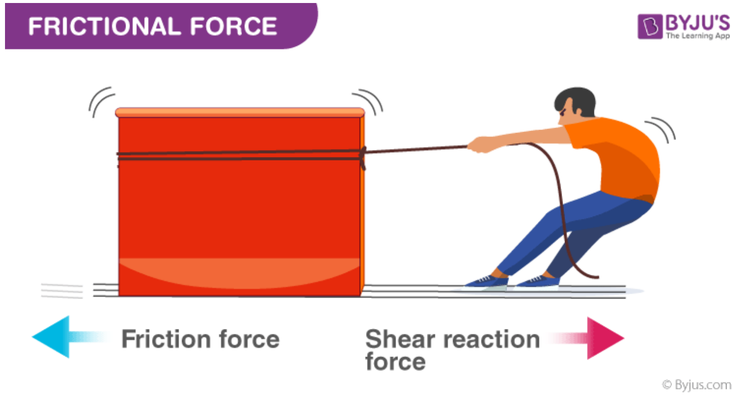
Forțele de frecare

În cazul sistemelor materiale supuse unor legături reale, apar forţe de rezistenţă care se opun deplasării sau tendinţei de deplasare a sistemului material, în raport cu corpul de care este legat.

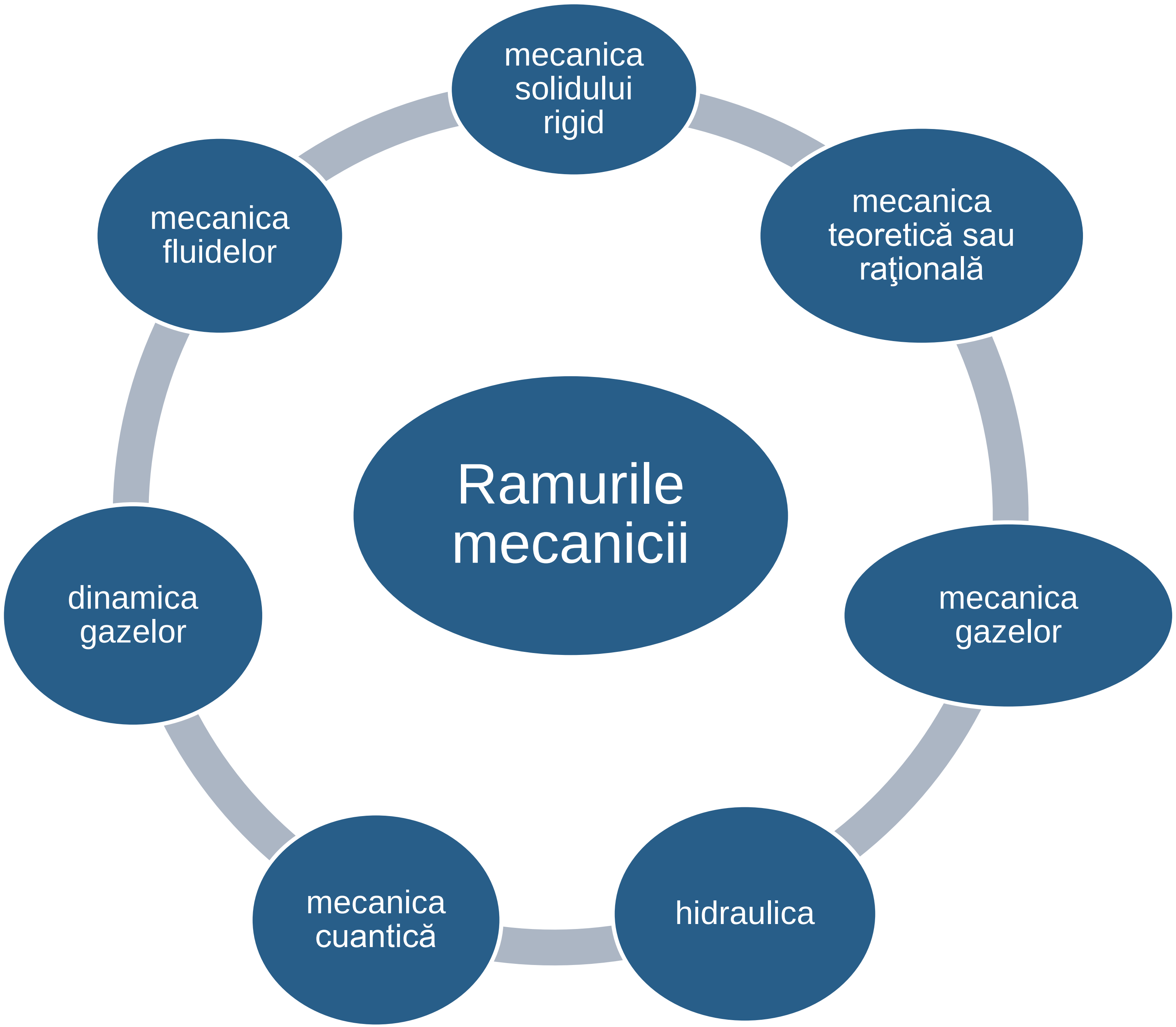
Forţa de frecare este, deci, o forţă de reacţiune, şi se dezvoltă într-o legătură, numai dacă există o forţă activă.





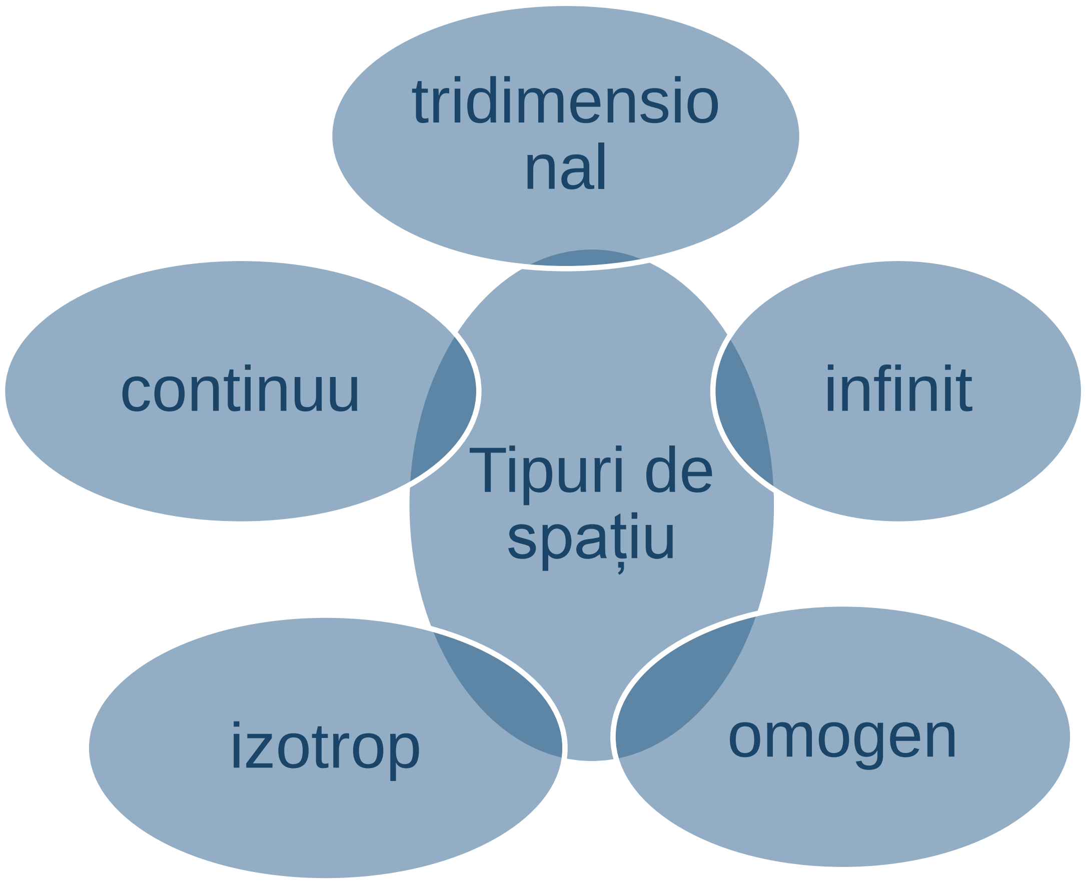


Mecanica este o ştiinţă fundamentală a naturii, care descrie şi stabileşte condiţiile de mişcare şi de repaus pentru corpurile aflate sub acţiunea diferitelor forţe. Ea are ca obiect de studiu forma mecanică a mişcării macroscopice a corpurilor şi cauzele care determină această mişcare. Prin mişcare mecanică se înţelege cea mai simplă formă de mişcare a materiei, a corpurilor macroscopice, mişcare care constă în deplasarea relativă a corpurilor materiale sau a unor părţi ale acestora, în raport cu un alt corp.


Ramurile mecanicii
mecanica solidului rigid
mecanica teoretică sau raţională
mecanica gazelor
hidraulica
mecanica cuantică
dinamica gazelor
mecanica fluidelor

Noţiuni fundamentale

- Spaţiul este o formă obiectivă de existenţă a materiei, care caracterizează dimensiunile şi întinderea obiectelor materiale. El exprimă ordinea coexistenţei corpurilor, mărimea, forma acestora



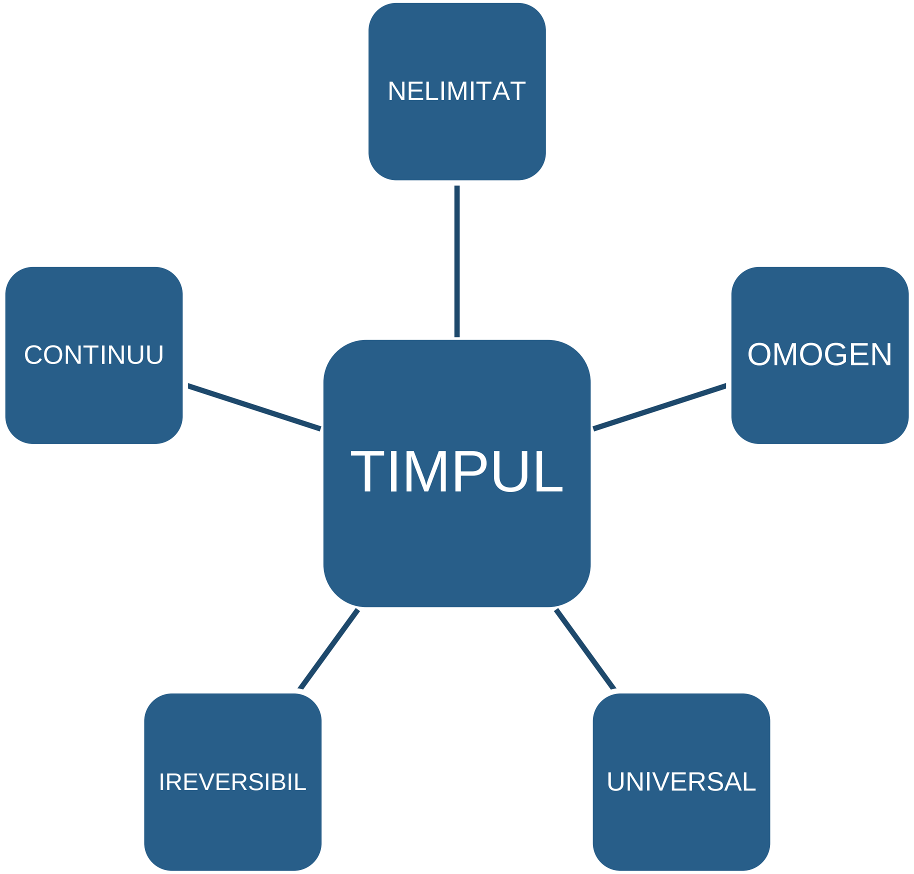
OBSERVAȚIE:

În mecanica clasică se utilizează spaţiul euclidian tridimensional

- omogen (are aceleaşi proprietăţi în orice punct)

- izotrop (are aceleaşi proprietăţi în orice direcţie)

Un moment se determină în raport cu un alt moment, ales ca origine şi se exprimă printr-o coordonată scalară, notată cu t. Spaţiul se percepe în legătură cu timpul.



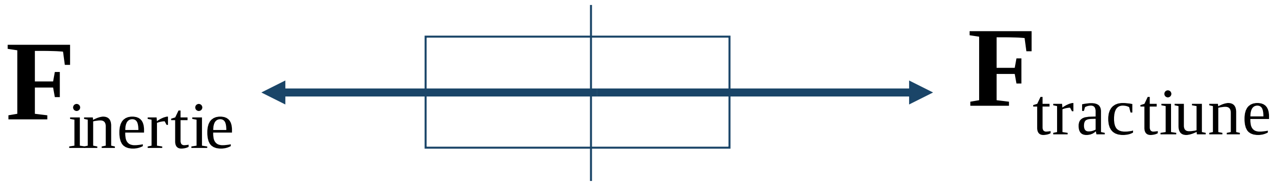
INERȚIA

La orice actiune exterioara care cauta să schimbe starea de repaus sau de mişcare rectilinie și uniformă corpul se opune; proprietate numită inerție.

O masură a inerției este masa

Principiul al II-lea
(principiul fundamental al mecanicii)

O forță constantă, acționând asupra unui punct material, îi imprimă acestuia o accelerație constantă, proporțională cu forță.
F=*ma*
Coeficientul de proportionalitate se numește masă
Unitatea de masura pentru forță în SI este NEWTON

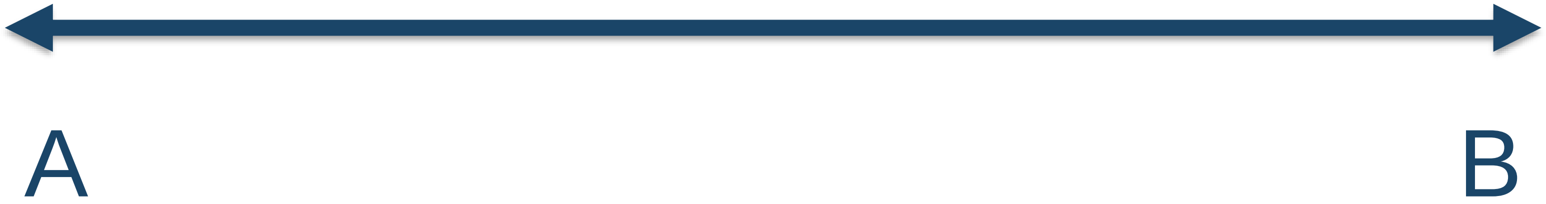


$$\mathbf{F}_{inertie} = -\mathbf{F}_{tractiune} = -\mathbf{ma}$$

Intr-un mijloc de transport:
la acelerare ne simțim trași înapoi, iar la frânare ne simțim împinsi înainte.

PRINCIPIUL ACTIUNII SI REACTIUNII

Daca un corp A actionează asupra altui corp B
cu o fortă , numită acțiune,
corpul B reacționează asupra corpului A
cu o forță egală în modul și de sens opus,
numită reacțiune



$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

Diviziunile mecanicii

- **Statica** studiază transformarea sistemelor de forţe în sisteme echivalente şi condiţiile de echilibru.

- **Cinematica** se ocupă de mişcarea în timp a punctului material, a sistemelor de puncte materiale şi a solidului rigid, independent de masă, de forţele şi momentele care acţionează asupra respectivului model.

- **Dinamica** este diviziunea mecanicii care studiază mişcarea, ţinând seama de forţele şi momentele care acţionează asupra modelului, precum şi de masa acestuia.

STATICA

CINEMATICA

DINAMICA

MĂRIMI FIZICE ŞI UNITĂŢI DE MĂSURĂ

- Mărimile fizice se împart în:

+ mărimi fizice primitive sau fundamentale, care sunt acele mărimi în funcţie de care se pot exprima, prin intermediul unor relaţii, toate celelalte mărimi fizice;

+ mărimi fizice derivate – celelalte mărimi fizice, care se exprimă în funcţie de mărimile primitive, prin intermediul unor formule.

Ecuaţia de dimensiuni a mărimii date corespunzătoare

$$[U] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$$

Cuprins

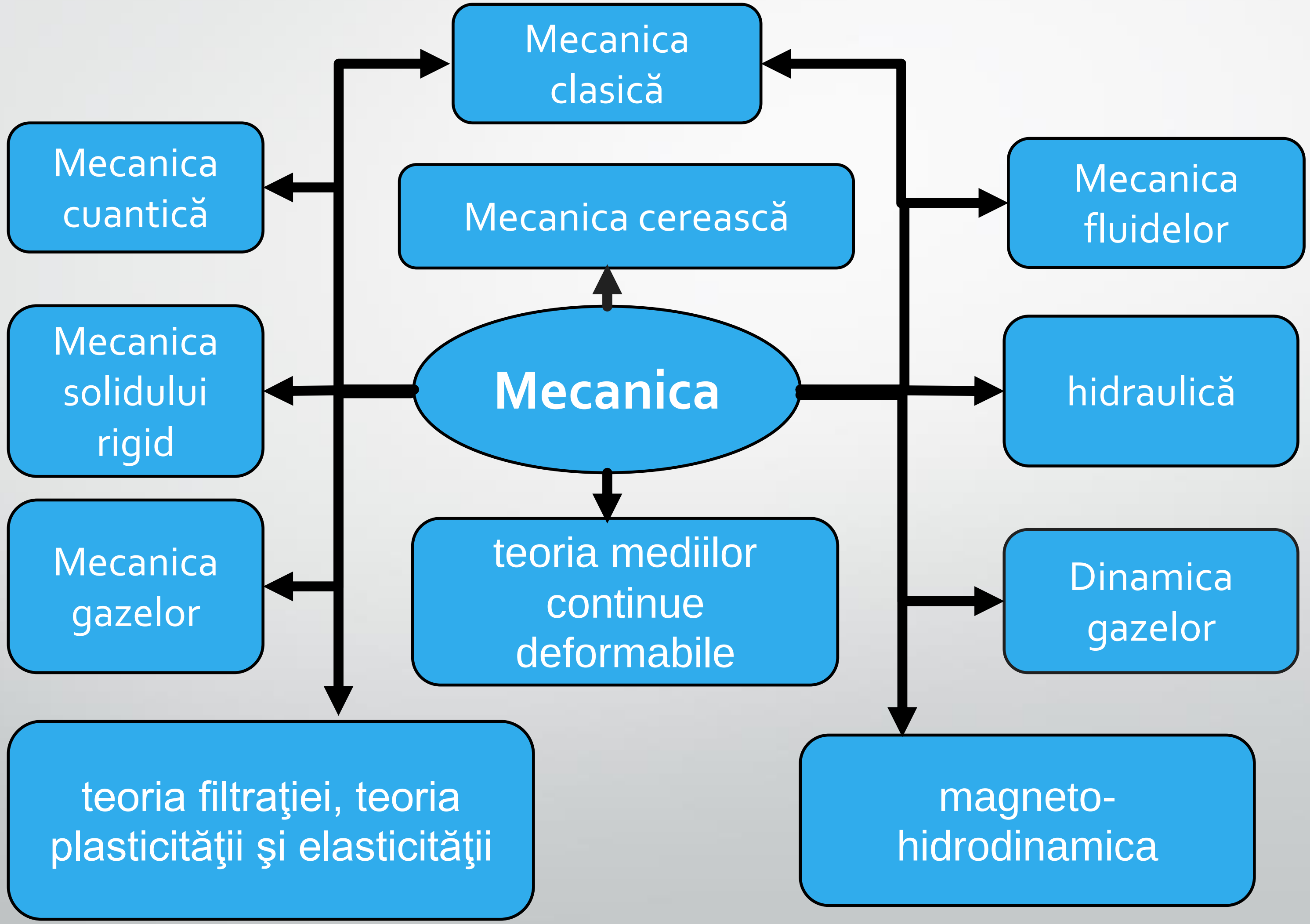
Definiție

- **Mecanica** este o știință fundamentală a naturii, care descrie și stabilește condițiile de mișcare și de repaus pentru corpuri aflate sub acțiunea diferitelor forțe.

- Are ca obiect de studiu forma mecanică a mişcării macroscopice a corpurilor şi cauzele care determină această mişcare.

- Prin mişcare mecanică se înţelege cea mai simplă formă de mişcare a materiei, a corpurilor macroscopice, mişcare care constă în deplasarea relativă a corpurilor materiale sau a unor părţi ale acestora, în raport cu un alt corp.

Ramuri ale mecanicii



Noțiuni fundamentale

- **Spaţiul** este o formă obiectivă de existenţă a materiei, care caracterizează dimensiunile şi întinderea obiectelor materiale. El exprimă ordinea coexistenţei corpurilor, mărimea, forma acestora.

- **În mecanica clasică se utilizează spaţiul euclidian tridimensional.**

Spațiul este:

- infinit
- tridimensional
- continuu
- omogen (are aceleaşi proprietăţi în orice punct)
- izotrop (are aceleaşi proprietăţi în orice direcţie).

Timpul

Definție : durata şi succesiunea proceselor realităţii obiective;

- ❖ nelimitat ;
- ❖ continuu ;
- ❖ omogen ;
- ❖ ireversibil ;
- ❖ universal ;

- **Masa** este legată de două proprietăţi importante ale materiei: gravitaţia şi inerţia corpurilor materiale.

- **Gravitaţia** este proprietatea corpurilor materiale de a se atrage reciproc.

- **Inerţia** este acea proprietate a corpurilor de a se opune unor schimbări ale stării lor de mişcare sau de repaus.

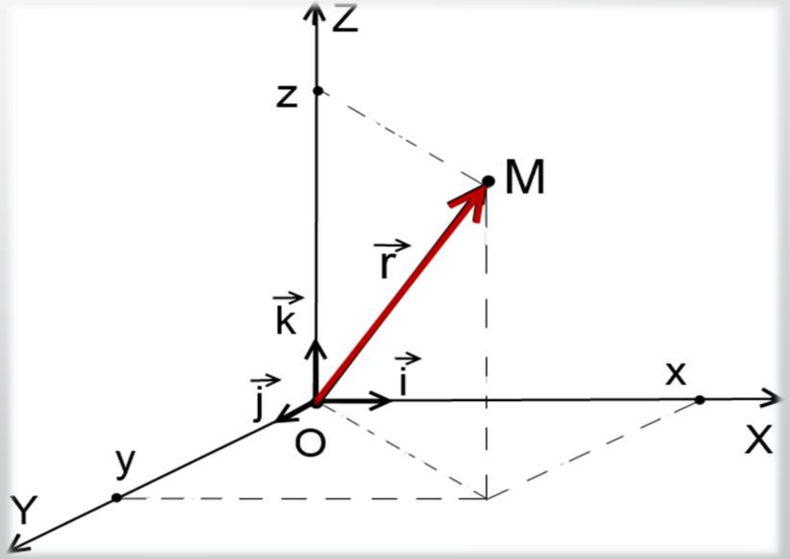
Forţa se foloseşte, de multe ori, mai ales în sistemele tehnice, în locul masei.

Masa este mărimea fizică scalară care măsoară proprietatea materiei de a fi inertă şi de a produce un câmp gravitaţional.

Modelele mecanicii teoretice

- **Sistemul discret** de puncte materiale : un număr finit de puncte materiale, care interacţionează mecanic ;
- **Blocul rigid** (volum material), corp care are toate cele trei dimensiuni comparabile între ele ;
- **Suprafaţa materială**, o suprafaţă geometrică care are masă distribuită; se prezintă sub formă de placă rigidă sau, dacă este flexibilă, sub formă de membrană ;
- **Corpul material continuu** reprezintă un domeniu în spaţiu, care conţine materie în fiecare punct geometric al său ;

- **Punctul material** (particulă materială) : punct geometric, căruia i se atribuie masa ;
- **Linia materială**, linie geometrică, având masa distribuită în lungul ei, care se prezintă, şi ea, sub două forme: sub formă de bară, dacă este rigidă, şi sub formă de fir, dacă este flexibilă ;



Coordonatele carteziene ale unui punct material

Diviziunile mecanicii

- **Statica** studiază transformarea sistemelor de forţe în sisteme echivalente şi condiţiile de echilibru.

- **Cinematica** se ocupă de mişcarea în timp a punctului material, a sistemelor de puncte materiale şi a solidului rigid, independent de masă, de forţele şi momentele care acţionează asupra respectivului model.

- **Dinamica** este diviziunea mecanicii care studiază mişcarea, ţinând seama de forţele şi momentele care acţionează asupra modelului, precum şi de masa acestuia.

Principiile mecanicii clasice

I. **Principiul inerţiei**, care afirmă că orice corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, atâta timp cât nu intervin alte forţe care să-i modifice această stare.

II. **Principiul acţiunii forţei** (legea a doua a lui Newton): variaţia mişcării este proporţională cu forţa motoare imprimată şi este dirijată pe linia de acţiune a forţei **{ F = m a }.**

III. **Principiul acţiunii şi reacţiunii**: la orice acţiune îi corespunde o reacţiune de aceeaşi direcţie, cu acelaşi modul, dar de sens contrar.

IV. **Principiul paralelogramului forţelor :** dacă asupra unui punct acţionează două forţe, efectul lor este acelaşi ca şi când asupra punctului ar acţiona o singură forţă , având mărimea şi sensul diagonalei paralelogramului construit pe cele două forţe ca laturi.

Mărimi fizice şi unități de măsură

❖ **Mărimi fizice primitive sau fundamentale**, sunt acele mărimi în funcţie de care se pot exprima, prin intermediul unor relaţii, toate celelalte mărimi fizice;

❖ **Mărimi fizice derivate** – celelalte mărimi fizice, care se exprimă în funcţie de mărimile primitive, prin intermediul unor formule.

❖ Cele mai utilizate sisteme de unităţi de măsură în sistemul fizic, care are ca mărimi primitive lungimea, timpul şi masa : **CGS** (cm g s), **SI** (m s kg).

❖ **Formula care permite calculul unei mărimi derivate, în funcţie de cele fundamentale.**

$U = f(L, M, T)$ Se obţine ecuaţia de dimensiuni a mărimii date corespunzătoare $[U] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$

L = lungimea;
M = masa;
T = timpul;

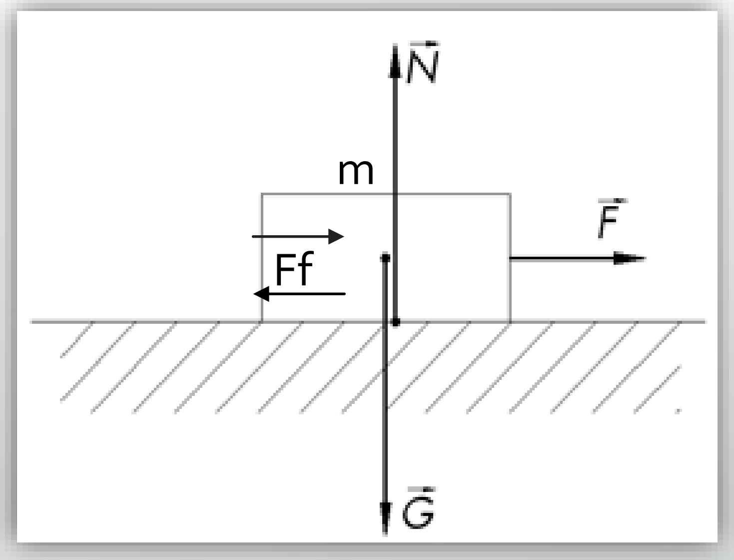
Legile frecării uscate ale lui Coulomb

❖ Cum componenta normală a reacţiunii este egală cu greutatea corpului, greutatea platanului şi a greutăţilor care se pun pe acesta măsoară forţa de frecare.Din acest experiment se pot trage urmatoarele concluzii.

❖ Mărimea forței de frecare de alunecare T nu depinde de viteza relativă a corpurilor şi de mărimea suprafeței de contact;

❖ T depinde de natura corpurilor şi de starea suprafeței de contact;

❖ Valoarea maximă a forței de frecare de alunecare T_{max} este proporțională cu modulul reacțunii normale N;



F = ma

N = G

Ff=μN

a = accelerația ;
m = masa;
Ff = forța de frecare;
F = forța de tracțiune;
G = greutatea corpului;
N = forța de reacțiune normal;
μ = coefficient de frecare la alunecare;

Cuprins

1.Obiectul mecanicii

2.Ramurile mecanicii

3.Noţiuni fundamentale

4.Pricipiile mecanicii clasice

5.Mărimi fizice şi unităţi de măsură

6.Legături mecanice

7.Forţele de frecare

1.Obiectul mecanicii

- Mecanica este o ştiinţă fundamentală a naturii, care descrie şi stabileşte condiţiile de mişcare şi de repaus pentru corpurile aflate sub acţiunea diferitelor forţe.
- Ea are ca obiect de studiu forma mecanică a mişcării macroscopice a corpurilor şi cauzele care determină această mişcare.

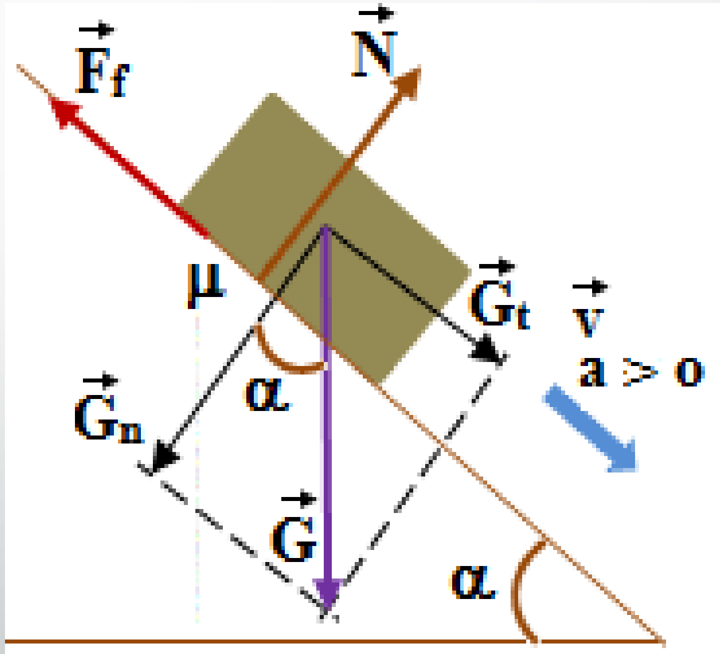
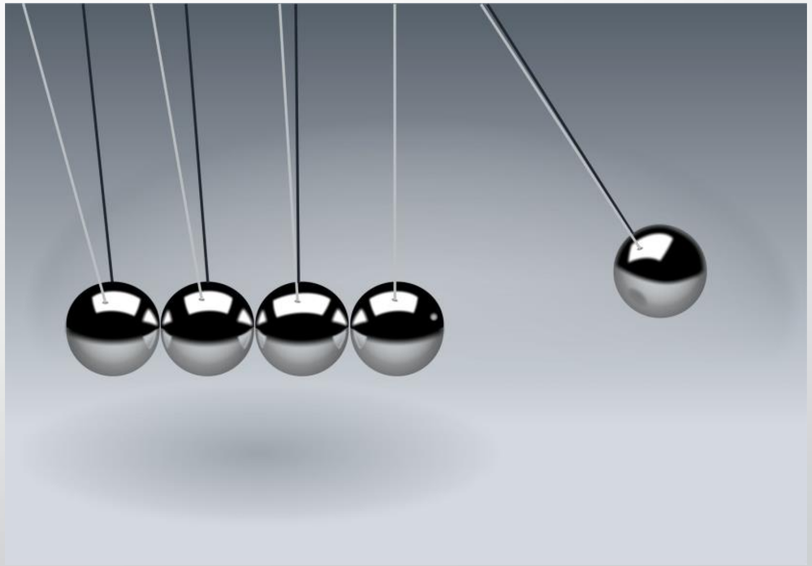


Fig. 9

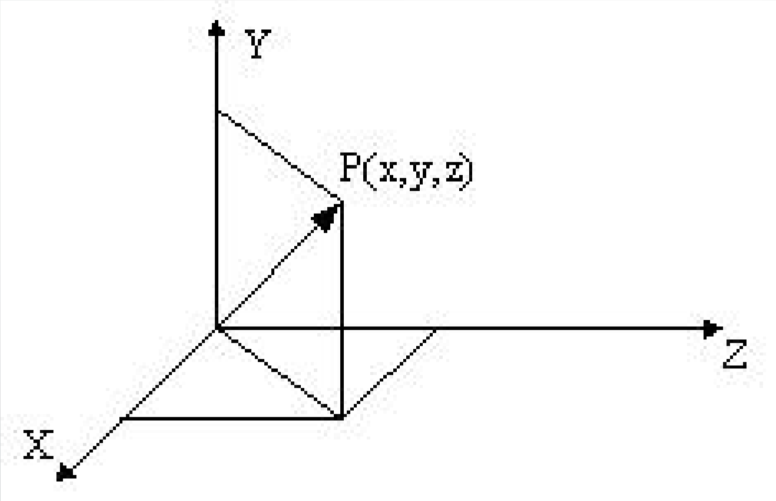
2.Ramurile mecanicii

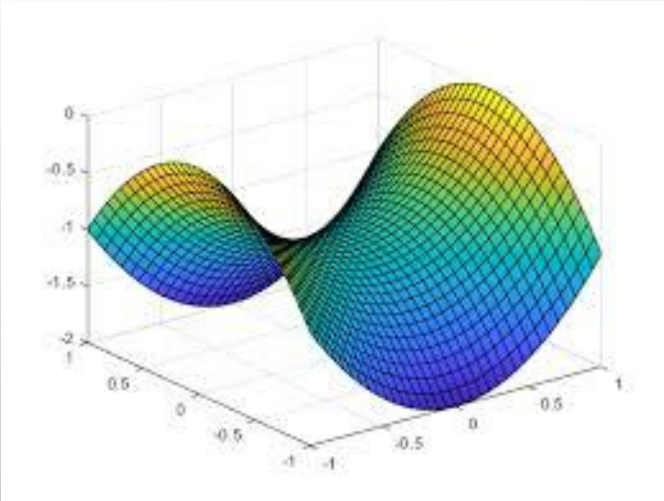
- - mecanica teoretică sau raţională / clasică
- - mecanica solidului rigid
- - mecanica fluidelor
- - mecanica gazelor
- - hidraulica
- - magneto-hidrodinamica
- - teoria filtraţiei, teoria plasticităţii şi elasticităţii
- - dinamica gazelor
- - mecanica cerească
- - teoria mediilor continue deformabile
- - mecanica cuantică
- - mecanica analitică etc.



3.Noţiuni fundamentale

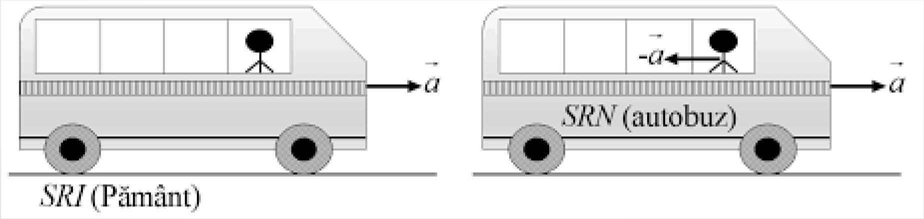
- Spaţiul este o formă obiectivă de existenţă a materiei, care caracterizează dimensiunile şi întinderea obiectelor materiale. El exprimă ordinea coexistenţei corpurilor, mărimea, forma acestora. Spaţiul este:
- - infinit
- - tridimensional
- - continuu
- - omogen





4.Pricipiile mecanicii clasice

- În mod obişnuit, se admit următoarele principii ale mecanicii clasice:
- principiul inerţiei, care afirmă că orice corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, atâta timp cât nu intervin alte forţe care să-i modifice această stare;



- principiul acţiunii forţei (legea a doua a lui Newton): variaţia mişcării este proporţională cu forţa motoare imprimată şi este dirijată pe linia de acţiune a forţei

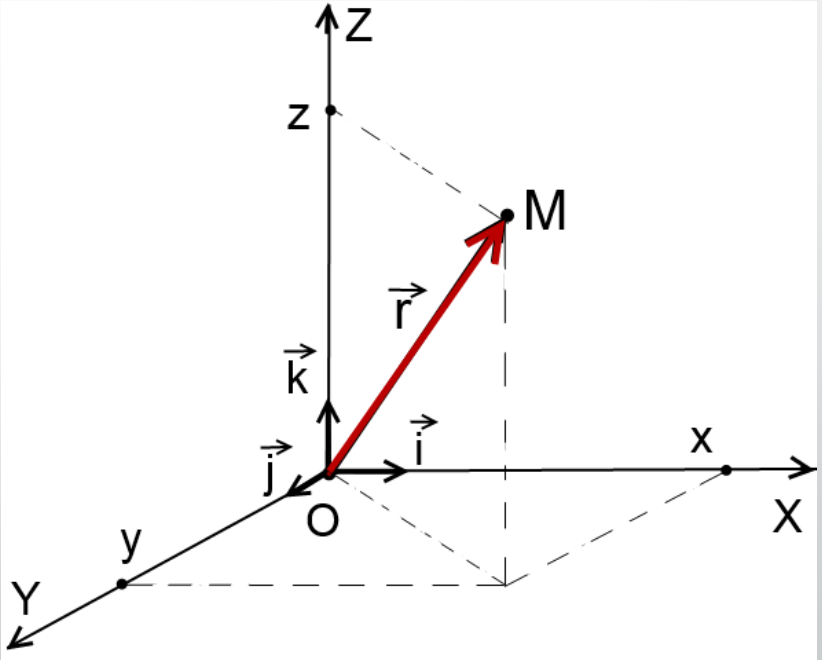
F = m a;

5.Mărimi fizice şi unităţi de măsură

- O însuşire a unei mulţimi de obiecte de aceeaşi natură poate fi o mărime fizică, dacă sunt îndeplinite următoarele trei condiţii:
- existã posibilitatea stabilirii unei relaţii de echivalenţă între obiectele care posedă respectiva însuşire şi, astfel, aceste obiecte se împart în clase de echivalenţă;
- există posibilitatea stabilirii unei relaţii de ordine între clasele de echivalenţă, pentru a putea face comparaţie între ele;
- există posibilitatea stabilirii unui criteriu de comparaţie (de câte ori o clasă este mai mare decât alta).
- Mărimile fizice se împart în:
- mărimi fizice primitive sau fundamentale, care sunt acele mărimi în funcţie de care se pot exprima, prin intermediul unor relaţii, toate celelalte mărimi fizice;
- mărimi fizice derivate – celelalte mărimi fizice, care se exprimă în funcţie de mărimile primitive, prin intermediul unor formule.

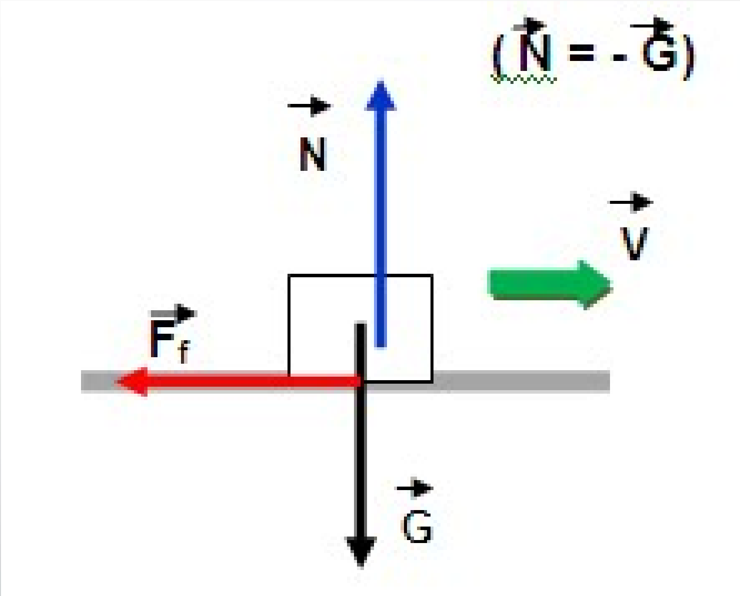
6.Legături mecanice

- Dacă mobilitatea unui sistem mecanic este supusă anumitor restricţii, se foloseşte formularea de sistem supus la legături.
- De exemplu, un punct material poate fi obligat să se mişte pe o curbă sau pe o suprafaţă, mişcarea lui fiind, în acest caz, o mişcare constrânsă sau supusă la legături.
- Curbele sau suprafeţele pe care trebuie să rămână punctul se numesc constrângeri.



7.Forţele de frecare

- În cazul sistemelor materiale supuse unor legături reale, apar forţe de rezistenţă care se opun deplasării sau tendinţei de deplasare a sistemului material, în raport cu corpul de care este legat. Acestea sunt forţe de interacţiune a suprafeţelor corpurilor şi se numesc forţe de frecare.
- Forţa de frecare este, deci, o forţă de reacţiune, şi se dezvoltă într-o legătură, numai dacă există o forţă activă.



Un exemplu de problema in care apare forta de frecare

- *Un corp de masa m=10Kg, asezat pe un plan orizontal, este tras de o forta care formeaza un unghi α=30° cu orizontala. Sa se afle aceasta forta, stiind ca corpul se misca orizontal cu acceleratia a=1,34m/s^2 si coeficientul de frecare la alunecare μ=0,27.*

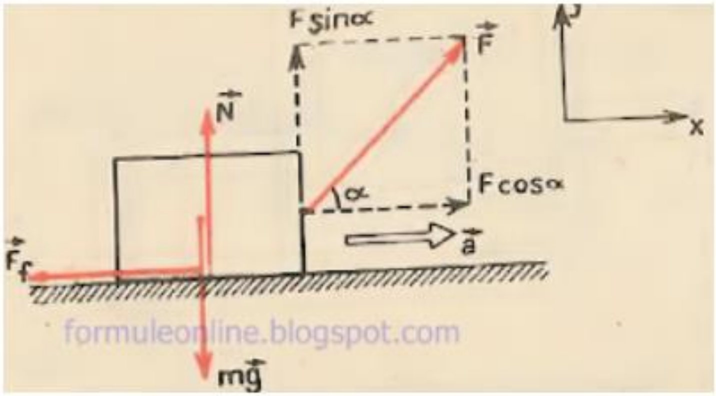


fig.1

Conform cu fig. 1 avem:

$F + mg + N + Ff = ma$

ma care proiectata pe cele doua axe da ecuatiile:

$F \cos\alpha - Ff = ma;$
$F \sin\alpha + N - mg = 0$ dar,
$Ff = Fc = \mu N = \mu(mg - F \sin\alpha)$

de unde:

$$F = \frac{m(a + \mu g)}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} = 40 \text{ N.}$$

Aici gasiti un exemplu prin care este scosa in evidenta forta de frecare:

EXPERIMENT:

Trageti o carte pe o suprafata neteda. Trageti aceeasi carte pe masa pe care ati pus o fata de masa din catifea.

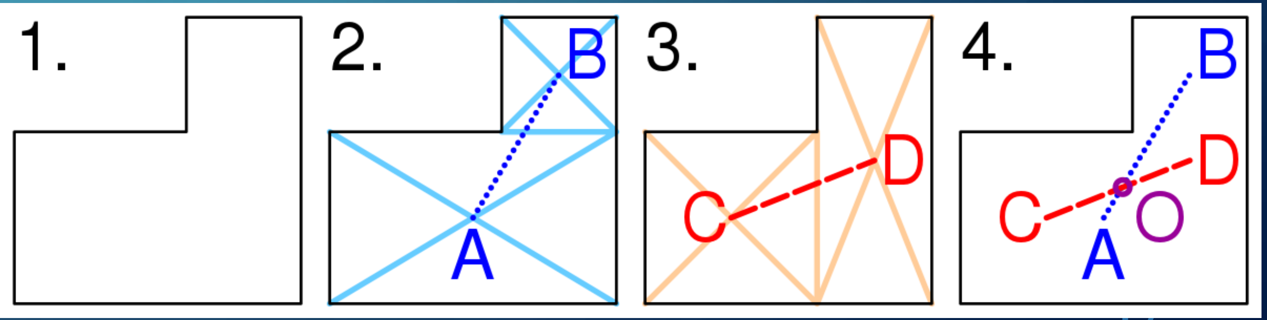
DEFINITIE

- Se alege un sistem ortogonal de axe de coordonate Oxyz şi un sistem de puncte materiale Pi,$i = \overline{1,n}$, de mase m_i şi de vectori de poziţie $\vec{r}_i$, faţă de originea O a sistemului de axe. Pentru un sistem de puncte materiale (Pi) , $i = \overline{1,n}$, punctul C, cu vectorul de pozitie dat de formula (1) se numeşte centrul de masă (de greutate) al sistemului de puncte materiale (Pi) .

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Notând cu M suma maselor punctelor materiale din sistem, adică M=$\sum_{i=1}^{n} m_i$,

$$M \cdot \vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i$$



PROPRIETATILE CENTRELOR DE MASA

- **Proprietatea 1**

Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se găsește în interiorul oricărei suprafețe convexe , care conține în interiorul său toate punctele sistemului.

- **Proprietatea 2**

Dacă punctele materiale ale unui sistem se află pe o dreaptă, atunci centrul de masă se află și el pe respectiva dreaptă.

- **Proprietatea 3**

Dacă sistemul de puncte materiale se află într-un plan, atunci centrul de masă al sistemului se află în același plan.

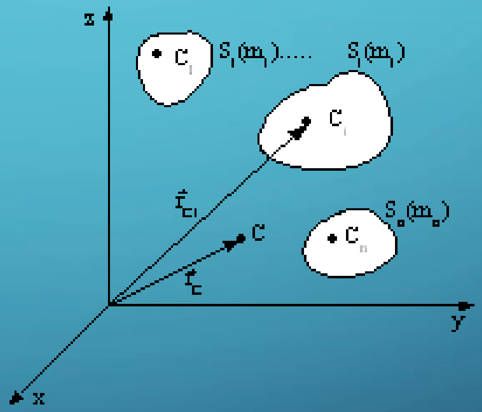
- **Proprietatea 4**

Dacă un sistem de puncte materiale are un plan, o axă de simetrie sau un centru de simetrie, atunci centrul de masă al sistemului se află în acel plan, pe acea axă respectiv în acel centru de simetrie.

Proprietatea 5

Dacă un sistem de puncte materiale S se compune dintr-un număr de p subsisteme (S1), (S2),…, (Sp), ale căror mase sunt M1, M2, …, Mp, iar centrele lor de masă sunt C1, C2,…, Cp, atunci centrul de masă al sistemului (S) se obține din formula : $\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{p} M_i \cdot \vec{r}_{C_i}}{\sum_{i=1}^{p} M_i}$, ca și cum masele subsistemelor componente, Mi, s-au concentrat în centrul lor de masă.

În formula de mai sus, $\vec{r}_{C_i}$ sunt vectorii de poziție ai centrelor de masă Ci și $\vec{r}_C$ este vectorul de poziție al centrului de masă al sistemului de puncte materiale considerat inițial.



Proprietatea 6

Dacă un sistem de puncte materiale (S) poate fi considerat ca provenind dintr-un sistem (S_1), din care a fost eliminat un sistem (S_2), și dacă se cunosc masele M_1, M_2 și centrele de masă C_1 , C_2 ale celor două sisteme, atunci centrul de masă al sistemului (S) se obține din : $\vec{r}_C = \frac{M_1 \vec{r}_{C_1} - M_2 \vec{r}_{C_2}}{M_1 - M_2}$.

MOMENTE STATICE

- Se numește moment static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan π mărimea scalară egală cu suma produselor dintre masele punctelor materiale și cotele acestora față de planul considerat.
- Planul π împarte spațiul în două semispații. Atunci când punctele se află în unul dintre aceste două semispații, cotele reprezintă chiar distanța dintre puncte și plan, iar când punctele se află în semispațiul opus, cota este egală cu opusul distanței punctului la plan.
- Teoremă

Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este egal cu produsul dintre masa întregului sistem şi cota centrului de masă al sistemului faţă de respectivul plan.

Consecinta

Din teorema rezultă că, dacă momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este nul, atunci centrul de masă se găsește în acel plan.

Pentru sistemele de puncte materiale situate într-un plan, se introduc momente statice prin următoarea definiție:

Definitie

Mărimea scalară egală cu suma produselor dintre masele punctelor unui sistem plan și ordonatele lor la o axă din planul sistemului se numește moment static în raport cu o axă.

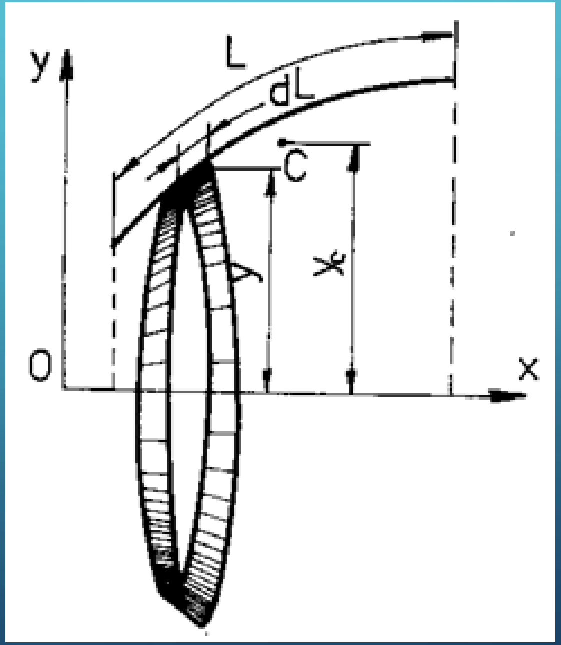
Teoremă

Momentul static al unui sistem de puncte materiale situate în acelaşi plan, faţă de o axă din planul sistemului, este egal cu produsul dintre masa sistemului şi ordonata centrului de masă.

TEOREMELE LUI GULDIN-PAPPUS

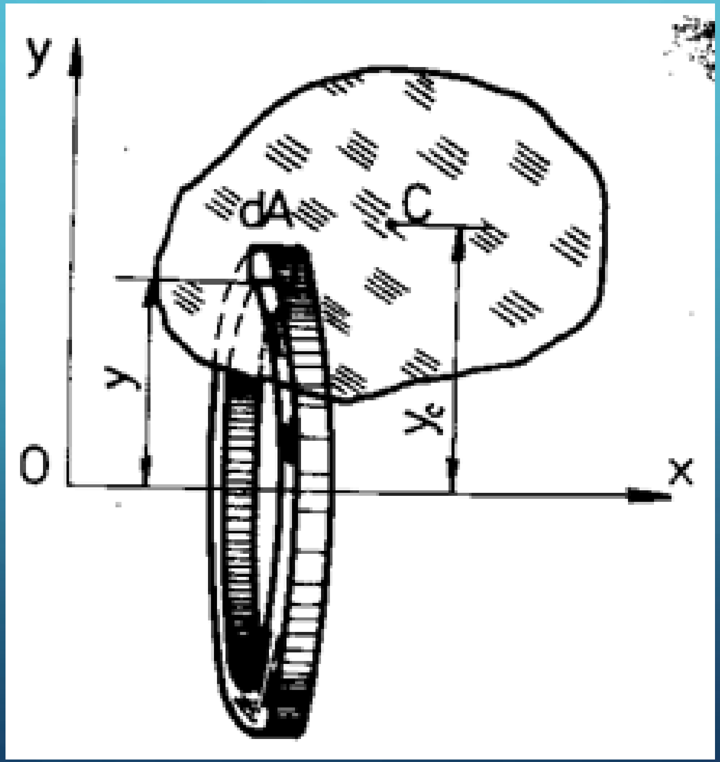
- Teorema 1

Aria suprafeţei generate de un arc de curbă plană care se roteşte în jurul unei axe din planul curbei (arcul fiind situat în întregime de aceeaşi parte a axei) este egală cu lungimea arcului de curbă, înmulţită cu lungimea cercului descris de centrul de masă al curbei date, considerată omogenă.



➢Teorema 2

Volumul corpului generat prin rotirea unei suprafeţe plane închise în jurul unei axe din planul său (suprafaţa fiind omogenă şi situată în întregime de aceeaşi parte a axei), este egal cu produsul dintre aria acestei suprafeţe şi lungimea cercului descris de centrul ei de masă.



Agendă:

1. Definiție

2. Proprietăți

3. Calculul centrelor de masă

4. Aplicații

5. Momente statice

6. T. Guldin-Pappus

1. Definiție:

- Se alege un sistem ortogonal de axe Oxyz și un sistem de puncte materiale, de mase m_i și de vectori de poziție r_i, față de originea sistemului de axe.

Pentru sistemul de puncte menționat anterior, punctul C, cu vectorul de poziție definit de formula (1) se numește centul de masă sau centrul de greutate al sistemului.

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \,. \quad (1)$$

- Deoarece sistemul de puncte cu care lucrăm este reprezentat într-un sistem ortogonal de axe Oxyz, centrul de masă este definit de trei coordonate, care se calculează cu ajutorul următoarelor formule:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}($$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};$$

2. Proprietăți:

P1.
Dacă punctele materiale ale unui sistem se află pe o dreaptă, atunci și centrul de masă se află pe respectiva dreaptă.

P2.
Dacă sistemul de puncte se află într-un plan, atunci și centrul de masă al sistemului se află în același plan.

P3.
Dacă un sistem de puncte materiale are un plan, o axă sau un centru de simetrie, atunci centrul de masă se află pe acea axă de simetrie.

P4.
Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se găsește în interiorul oricărei suprafețe convexe, care conține în interiorul său toate punctele sistemului.

P5.
Dacă un sistem de puncte S, se compune din mai multe subsisteme, ale căror mase sunt M1, M2, …, iar centrele lor de masă sunt C1, C2,…, atunci centul de masă al sistemului se obține cu formula:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{p} M_i \cdot \vec{r}_{C_i}}{\sum_{i=1}^{p} M_i}$$

3. Calculul centrelor de masă:

Calculul centrelor de masă, se face folosind un raționament simplu și completând tabelul următor:

- ✓ Urmărim să avem toate dimensiunile figurii al cărei centru de masă trebuie calculate.
- ✓ Calculăm aria figurii. Dacă figura este una complexă, o îpărțim în figure simple, după cum convine și calculăm ariile corespunzatoare.
- ✓ Aflăm coordonatele y_i si z_i, după același principiu menționat mai sus.
- ✓ Finalizăm calculele și trecem rezultatele în tabel.

Orientativ, tabelul arată în felul următor:

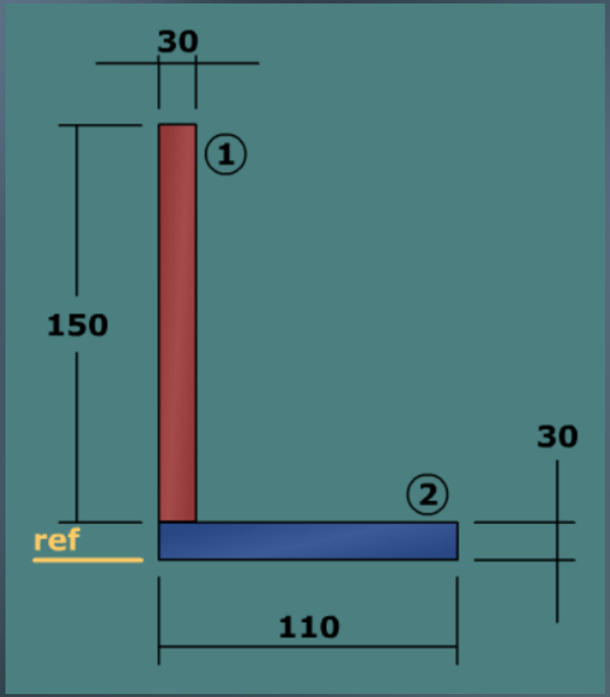
	I	L	Ai	Yi	Zi	AiYi	AiZi
Figura							

4. Aplicații:

Calculați centrul de masă al corpului din figura alaturată, având forma și dimensiunile menționate.

Rezolvare:

	l	L	Ai	Yi	Zi	AiYi	Aizi
1.	30	150	4500	105	75	…	…
2.	30	110	3300	55	15	…	…



După completarea acestui tabel, aplicăm formulele menționate în slide-ul 3 și obținem coordonatele centrului de masă.

5. Momente statice

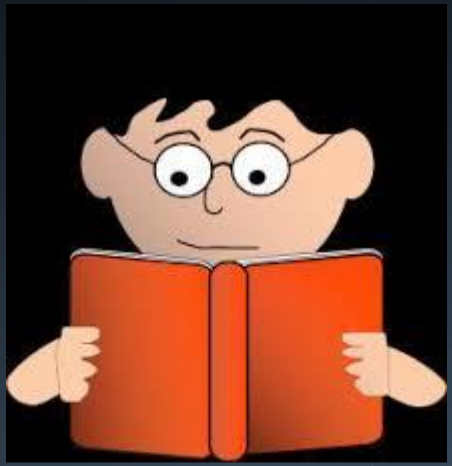
Teoremă:
Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este egal cu produsul dintre masa întregului sistem și cota centrului de masă al sistemului față de respectivul plan.

Definiție:
Mărimea scalară egală cu suma produselor dintre masele punctelor unui sistem plan și ordonatele lor la o axă din planul sistemului se numește moment static în raport cu o axă.

Consecință:
Din teoremă rezultă că, dacă momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este nul, atunci centrul de masă se găsește în acel plan.

6. Teoremele lui Guldin-Pappus:

Teorema 2:
Volumul corpului generat prin rotirea unei suprafeţe plane închise în jurul unei axe din planul său (suprafaţa fiind omogenă şi situată în întregime de aceeaşi parte a axei), este egal cu produsul dintre aria acestei suprafeţe şi lungimea cercului descris de centrul ei de masă.



Teorema 1:
Aria suprafeţei generate de un arc de curbă plană care se roteşte în jurul unei axe din planul curbei (arcul fiind situat în întregime de aceeaşi parte a axei) este egală cu lungimea arcului de curbă, înmulţită cu lungimea cercului descris de centrul de masă al curbei date, considerată omogenă.

Cuprins

Definitie

Proprietati

Calculul

Momente statice

Teoreme

Exemple

Definitie

Centrul de masă: este un punct din spaţiul tridimensional asociat unui corp sau unui sistem de corpuri ales astfel încât influenţa unui câmp uniform de forţe asupra corpului este echivalentă cu influenţa unei singure forţe ce acţionează asupra acestui punct.

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad . (1)$$

- Notând cu *M* suma maselor punctelor materiale

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \ ,$$

- centrul maselor unui sistem de puncte materiale este dat de relaţiile

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \ ; \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \ ; \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \ (3)$$

Proprietati

Pozitia centrului de masa nu depinde de sistemul de referinta ales, fiind un punct intrinsec al sistemului material

Dacă punctele materiale ale unui sistem se află pe o dreaptă, atunci centrul de masă se află si el acolo

Dacă sistemul de puncte materiale se află într-un plan, atunci centrul de masă al sistemului se află în acelaşi plan.

Daca corpul are un plan, o axa sau un centru de simetrie, atunci centrul maselor se afla în acel plan, pe acea axa sau în acel punct.

Daca un sistem (S) de puncte materiale este format din *n* subsisteme , ale caror mase $M_i, i=\overline{1,n}$, si centre de masa $C_i, i=\overline{1,n}$, se cunosc atunci centrul de masa al sistemului (S) se obţine din formula

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad . (1)$$

Dacă un sistem de puncte materiale (S) poate fi considerat ca provenind dintr-un sistem (S_1), din care a fost eliminat un sistem (S_2), şi dacă se cunosc masele M_1, M_2 şi centrele de masă C_1 , C_2 ale celor două sisteme, atunci centrul de masă al sistemului (S) se obţine din

$$\vec{r}_C = \frac{M_1\vec{r}_{C_1} - M_2\vec{r}_{C_2}}{M_1 - M_2} \quad .(5)$$

Calculul

1. Stabilim pozitia sistemul de coordonate

2. Impartim placa in regiuni

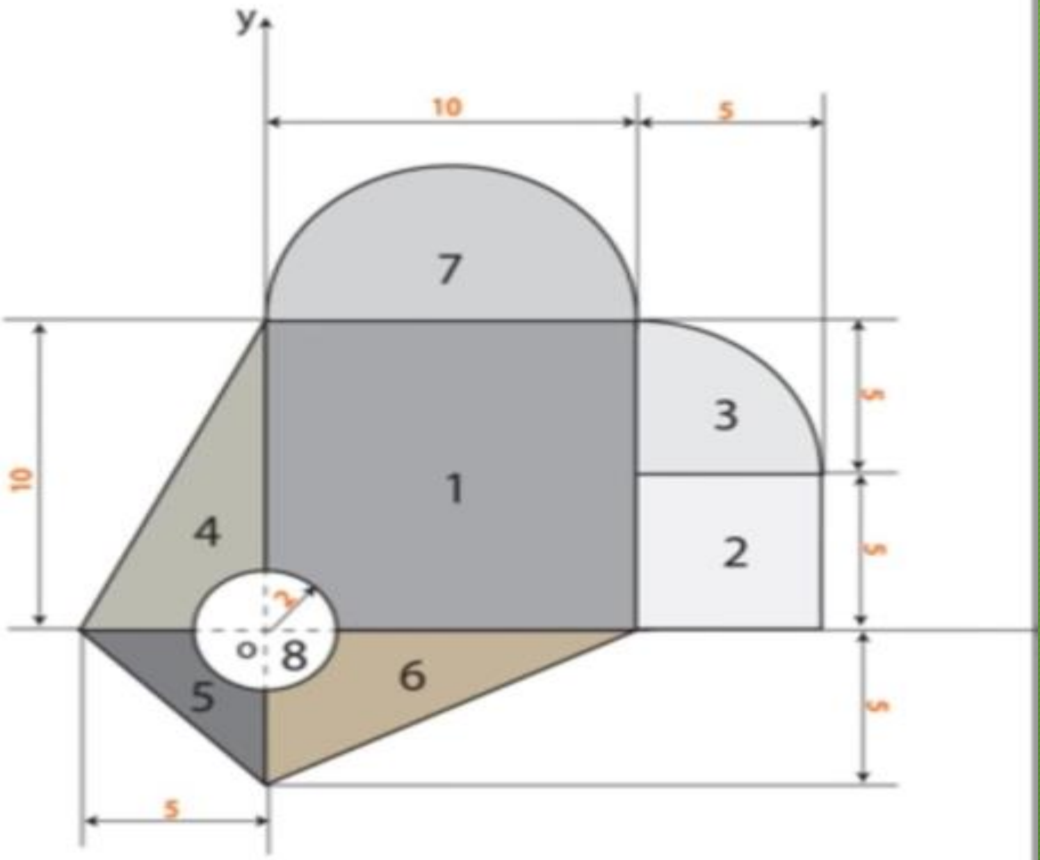
3. Pentru fiecare regiune aflam x_c y_c A

4. Construim tabelul :

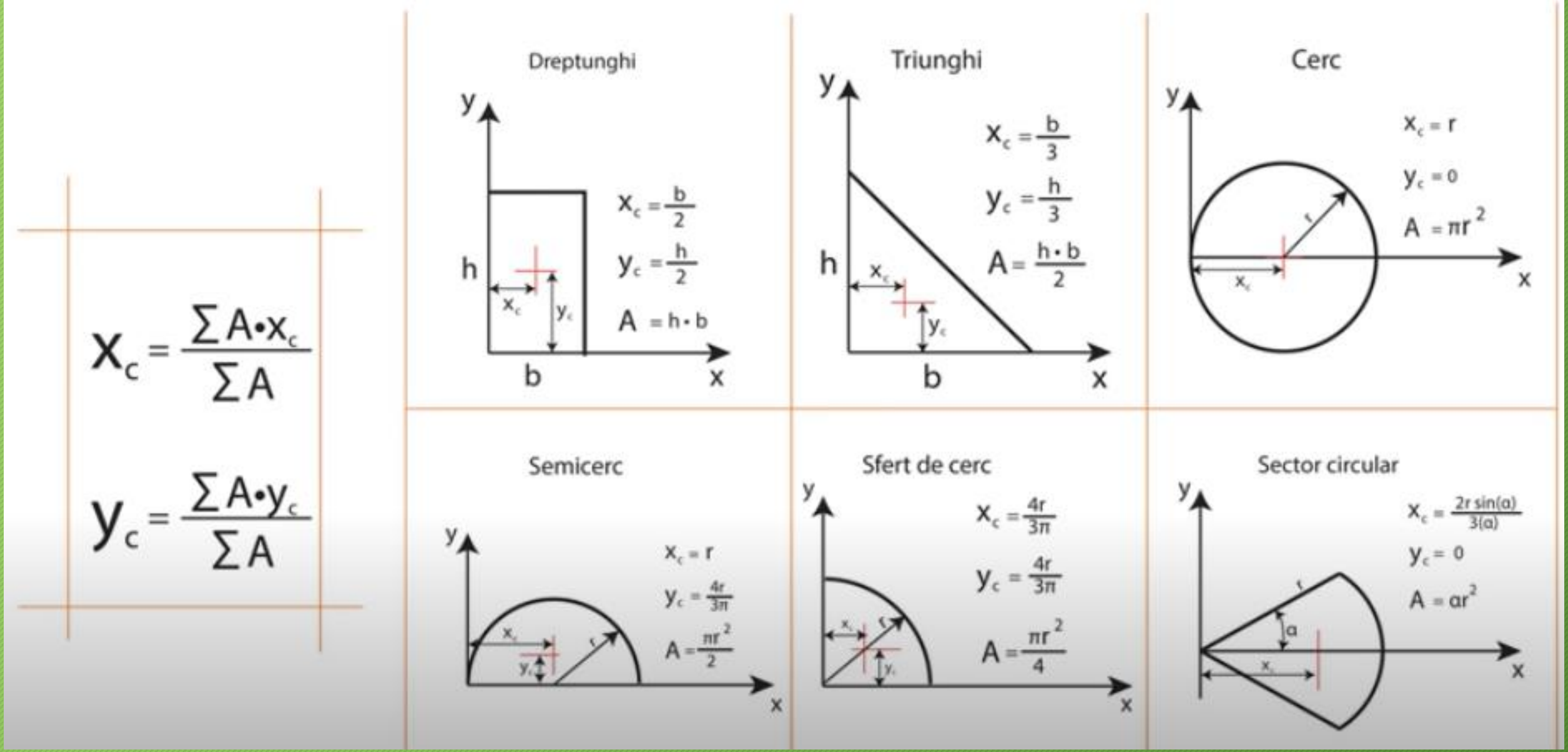
Nr. reg.	x_c	y_c	A	$A \cdot x_c$	$A \cdot y_c$
1					
i					
n					
Σ	—	—	ΣA	$\Sigma A \cdot x_c$	$\Sigma A \cdot y_c$

5. Aplicam formulele :

$$x_c = \frac{\Sigma A \cdot x_c}{\Sigma A} \quad \bigg| \quad y_c = \frac{\Sigma A \cdot y_c}{\Sigma A}$$



Calculul



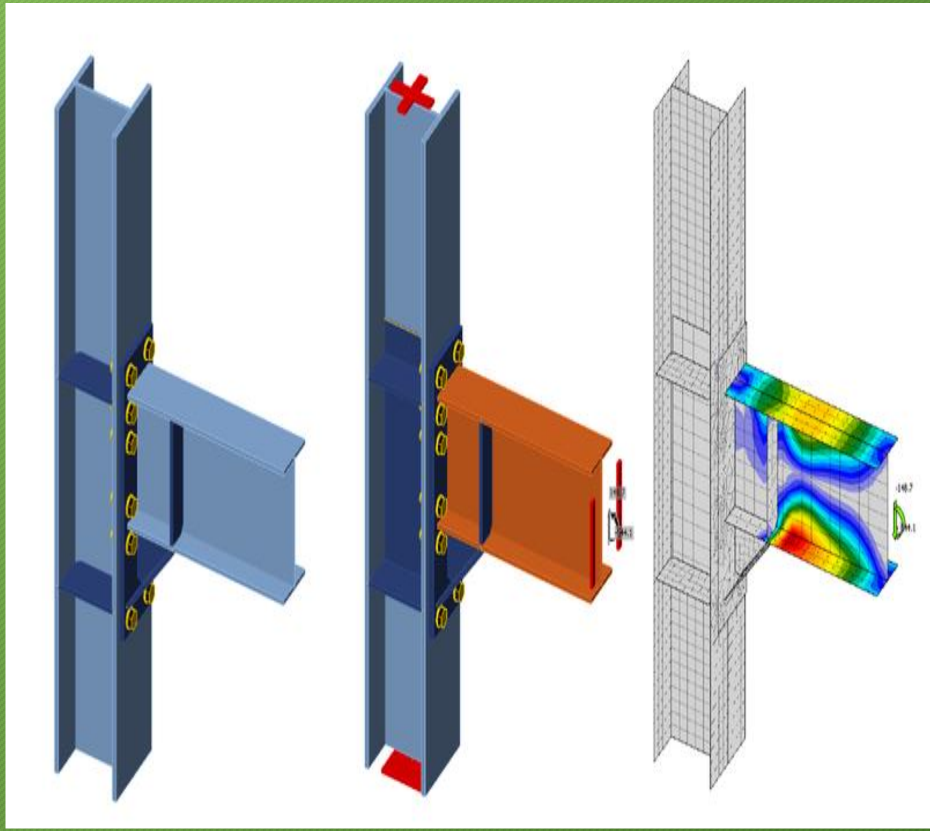
$x_c = \frac{\sum A \cdot x_c}{\sum A}$
$y_c = \frac{\sum A \cdot y_c}{\sum A}$
Dreptunghi
$x_c = \frac{b}{2}$
$y_c = \frac{h}{2}$
$A = h \cdot b$
Triunghi
$x_c = \frac{b}{3}$
$y_c = \frac{h}{3}$
$A = \frac{h \cdot b}{2}$
Cerc
$x_c = r$
$y_c = 0$
$A = \pi r^2$
Semicerc
$x_c = r$
$y_c = \frac{4r}{3\pi}$
$A = \frac{\pi r^2}{2}$
Sfert de cerc
$x_c = \frac{4r}{3\pi}$
$y_c = \frac{4r}{3\pi}$
$A = \frac{\pi r^2}{4}$
Sector circular
$x_c = \frac{2r\sin(\alpha)}{3(\alpha)}$
$y_c = 0$
$A = \alpha r^2$

Momente statice

Se numește moment static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan π(împarte spațiul în două semispații) mărimea scalară egală cu suma produselor dintre masele punctelor materiale și cotele acestora față de planul considerat.

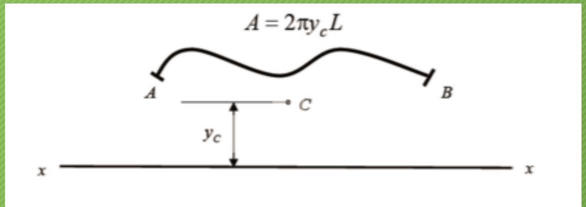
În aceste condiții, sumele $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i ; \sum_{i=1}^{n} m_i y_i ; \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$ reprezintă momentele statice ale sistemului de puncte materiale în raport cu planele yOz, zOx, xOy,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = M \cdot x_C \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = M \cdot y_C \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i z_i = M \cdot z_C \,,$$

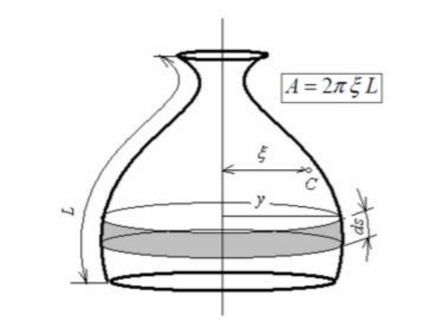


Teoremele lui Guldin – Pappus

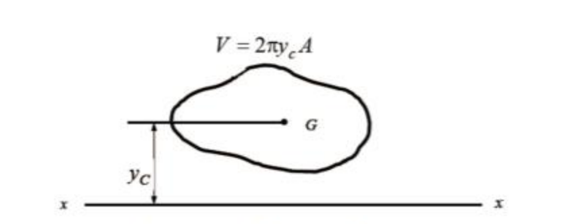
Aria suprafeţei generate de un arc de curbă plană, care se roteşte în jurul unei axe din planul curbei, pe care nu o intersectează, este egală cu lungimea arcului de curbă multiplicată cu lungimea cercului descris de centrul de masă al curbei date, presupuse omogene:



Teorema I Guldin-Pappus

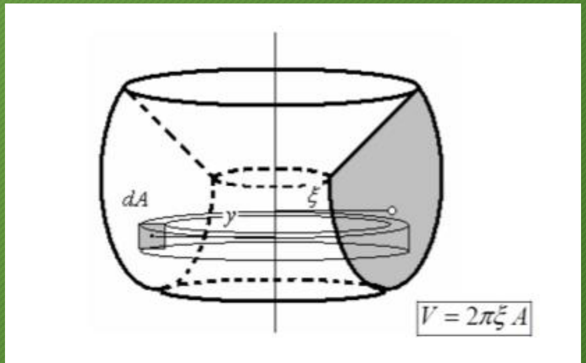


Teorema I Guldin-Pappus



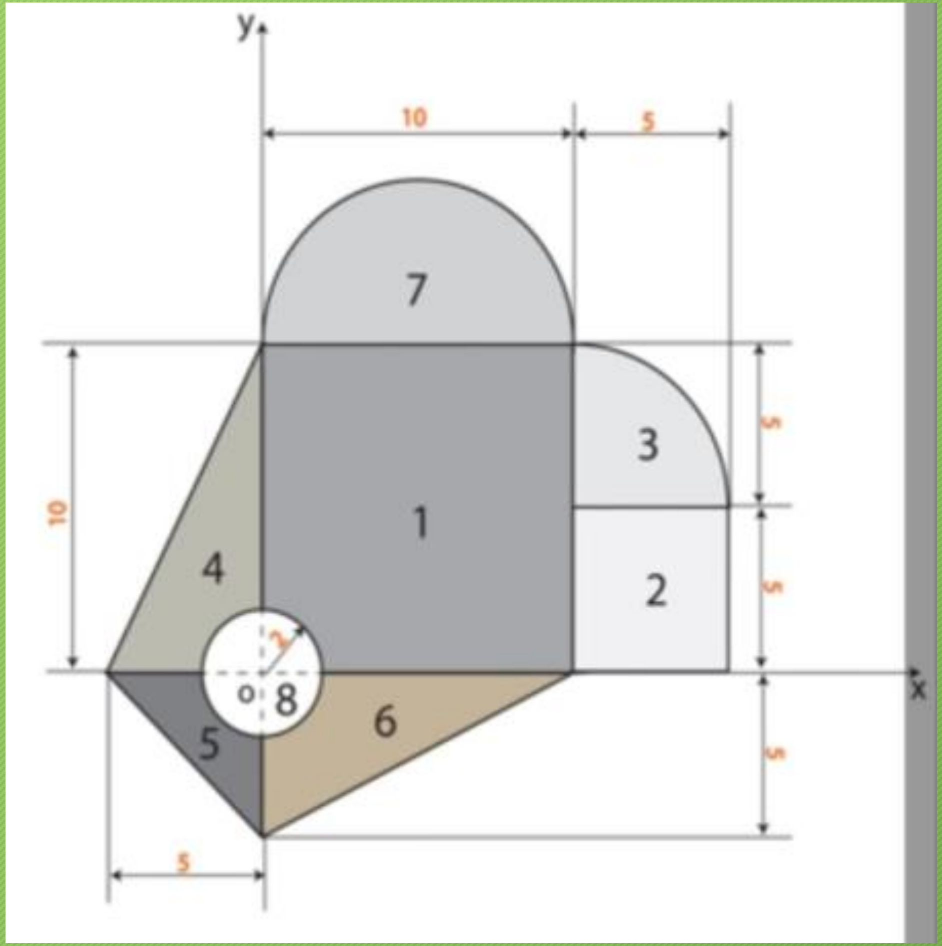
Teorema II Guldin-Pappus

Volumul generat prin rotirea unei suprafe țe plane în jurul unei axe din planul s ău pe care nu o intersecteaz ă, este egal cu aria considerat ă multiplicat ă cu lungimea cercului descris de centrul de mas ă al ariei:



Teorema II Guldin-Pappus

Exemple



Nr. reg.	x_c	y_c	A	$A \cdot x_c$	$A \cdot y_c$
1	5	5	100	500	500
2	12,5	2,5	25	312.5	62.5
3	12,12	7,12	19,625	237,885	139,73
4	-1,67	3,34	25	-41,75	83,5
5	-1,67	-1,67	5	-8,35	-8,35
6	3,34	-1,67	25	83,5	-41,75
7	5	12,12	39,25	196,25	475,71
8	0	0	-12,56	0	0
Σ			226,315	1280,035	1211,34

$$X_c = \frac{\sum A \cdot x_c}{\sum A} \qquad y_c = \frac{\sum A \cdot y_c}{\sum A}$$

$$X_c = \frac{1280{,}035}{226{,}315} \qquad y_c = \frac{1211{,}34}{226{,}315}$$

$$X_c = 5{,}66 \qquad y_c = 5{,}36$$

Momente de inerție:

Se folosesc la caracterizarea modului de răspândire a substanței într-un rigid si cu ajutorul lor se exprima inerția unui corp aflat in mișcare de rotație

Momente de inerție mecanice:

- axiale

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2); \quad J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

- planare

$$J_{xoy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2; \quad J_{yoz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2; \quad J_{zox} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$$

- polare

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

-centrifugale

$$J_{yx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i; \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i; \quad J_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

Observații:

Momentele de inerție mecanice, planare, axiale si polare sunt mărimi mecanice diferite de zero si totdeauna pozitive. Se pot considera egale cu 0 următoarele momente de inerție:

- momente de inerție ale plăcilor plane subțiri fata de planele lor mediane
- momente de inerție ale barelor subțiri si rectilinii in raport cu axele lor mediane

Proprietățile momentelor de inerție

- nu sunt independente
- sunt pozitive
- Daca punctele materiale se găsesc într-un plan, atunci momentul de inerție fata de respectivul plan este nul
- Spre deosebire de momentele de inerție, momentele centrifugale pot fi pozitive,
- negative sau nule

Proprietatea 1

$$J_O = 1/2\,(J_x + J_y + J_z)$$

Momentul de inerție polar este egal cu semisuma momentelor de inerție axiale în raport cu un sistem de coordonate carteziene Oxyz, care are originea O în polul față de care se calculează momentul de inerție polar:

Proprietatea 2

$$J_O = J_{yoz} + J_x$$

Momentul de inerție polar este egal cu suma dintre momentele de inerție în raport cu un plan și o axă normală la acel plan în polul față de care se calculează momentul de inerție polar.

https://www.youtube.com/watch?v=_RsUIcTPYIM

Proprietatea 3

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) = J_{yoz} + J_{zox} + J_{xoy}$$

Momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție în raport cu planele unui sistem cartezian de axe de coordonate cu originea în polul considerat.

Proprietatea 4

$$J_x = J_{zox} + J_{xoy}$$

Momentul de inerție axial este egal cu suma momentelor de inerție în raport cu două plane care se intersectează rectangular după acea axă.

Proprietatea 5

$$J_x + J_y >= J_z$$

Momentul de inerție axial este egal cu suma momentelor de inerție în raport cu două plane care se intersectează rectangular după acea axă.

https://ro.wikipedia.org/wiki/Fi%C8%99ier:25._%D0%A0%D0%BE%D1%82%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D0%BD_%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%BB.ogv

Experiment cu scaun rotativ, ilustrând momentul de inerție. Când omul care se rotește își apropie brațele, momentul său de inerție scade; pentru a conserva momentul cinetic, îi crește viteza unghiulară.

Rază de inerție

Se numește raza de inerție (de girație) distanta fata de un punct a punctului in care, daca s-ar concentra toată masa sistemului, s-ar obține același moment de inerție

$J = M{*}i^2$,unde $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ este masa sistemului de puncte materiale și J un moment de inerție mecanic.

Momente de inerție ale sistemelor de puncte situate într-un plan

Pentru sistemul de puncte materiale situate într-un plan, fata de sistemul de coordonate carteziene Oxy, se pot calcula trei momente de inerție si un moment centrifugal.

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2\ ,\quad J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2\ ,\ J_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right),\ J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

Legate intre ele prin relația :

$$J_0 = J_x + J_y$$

Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele

Teorema axelor paralele: Momentul de inerție în raport cu o axă Δ, paralelă cu axa Δ0, care trece prin centrul de masă C al sistemului de puncte materiale, este egal cu suma dintre momentul de inerție în raport cu axa ce trece prin centrul de masă și produsul dintre masa M a sistemului cu pătratul distanței d dintre cele două axe.

$$J_{\Delta} = J_{\Delta 0} + Md^2$$

Consecințe

1) Momentul de inerție minim al unui sistem de puncte materiale S, față de axele de aceeași direcție, este cel corespunzător axei care trece prin centrul de masă al sistemului.

2) Locul geometric al axelor paralele față de care sistemul de puncte materiale are același moment de inerție este suprafața unui cilindru de revoluție a cărui axă trece prin centrul de masă al sistemului.

Direcții principale de inerție. Momente principale de inerție

Valorile extreme ale momentelor de inerție se numesc momente principale de inerție, iar axele Δ1, Δ2, Δ3 corespunzătoare, se numesc axe principale de inerție. Dacă O=C, momentele se numesc momente centrale de inerție. Dacă sunt și principale sunt momente centrale principale de inerție.

Acestea au proprietatea că sunt momente de inerție maxime sau minime în raport cu o axă care trece prin centrul de masă al sistemului de puncte. Se demonstrează că axele principale de inerție sunt perpendiculare două câte două iar momentele centrifugale, în raport cu axele principale de inerție, sunt nule.

Cazul plan

În cazul sistemelor de puncte materiale situate într-un plan, raportat la sistemul cartezian de axe xOy,

$$J_{1,2}=\frac{J_x+J_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{J_x-J_y}{2}\right)^2+J_{xy}^2}\ ;\ J_3=J_0$$

Axele principale de inerție sunt incluse în planul *Oxy* și formează cu *Ox* unghiurile notate cu α1 și α2. Unghiurile α1,α2 corespunzătoare axelor principale de inerție, se calculează din formula

$$tg\,2\alpha=\frac{J_{xy}}{J_y-J_x}$$

CUPRINS

Definiția momentelor de inerție și tipuri

Se numeşte moment de inerţie mecanic al sistemului de puncte materiale în raport cu un plan suma produselor dintre masele punctelor sistemului şi pătratele distanţelor acestora la plan. Dacă planul se înlocuieşte cu o axă sau cu un punct, se obţin momente de inerţie axiale respectiv polare.

Faţă de sistemul de axe de coordonate *Oxyz*, se pot defini următoarele momente de inerţie:

- *planare*

$$J_{xoy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2; \quad J_{yoz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2; \quad J_{zox} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$$

- *axiale*

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2); \quad J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

- *polare*

$$J_O = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

Proprietăţile momentelor de inerţie

1) Momentele de inerţie nu sunt independente

2) Momentele de inerţie sunt pozitive

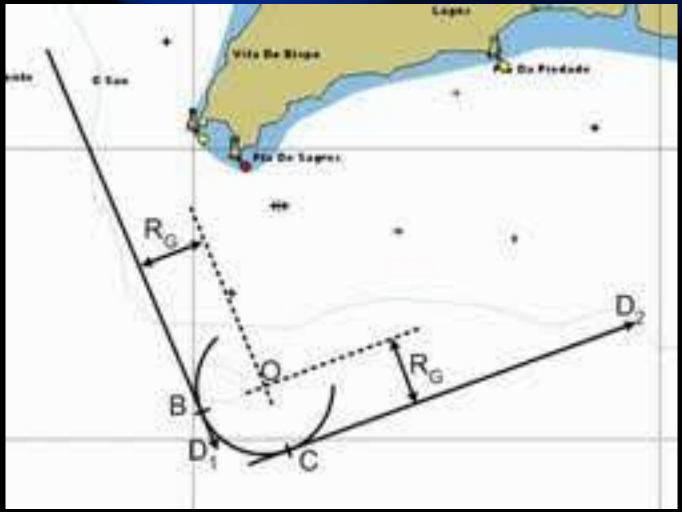
3) Dacă punctele materiale se găsesc într-un plan, atunci momentul de inerţie faţă de respectivul plan este nul. De asemenea, dacă punctele se găsesc pe o axă, momentul de inerţie faţă de această axă este nul.

4) Spre deosebire de momentele de inerţie, momentele centrifugale pot fi pozitive, negative sau nule.

Rază de inerție (raza de girație)

Se numeşte rază de inerţie (rază de giraţie) distanţa faţă de un punct (axă sau plan) a punctului în care, dacă s-ar concentra toată masa sistemului, s-ar obţine acelaşi moment de inerţie.

$$J = M i^2$$



M=masa sistemului de puncte materiale

J=moment de inerție mecanic

EXEMPLU: GIRAȚIA NAVEI-ELEMENTELE CURBEI DE GIRAȚIE

Momente de inerție ale sistemelor de puncte situate într-un plan

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \;,\quad J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \;,\; J_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right), \; J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

Pentru sistemele de puncte materiale situate într-un plan, față de sistemul de coordonate carteziene *Oxy*, se pot calcula trei momente de inerţie şi un moment centrifugal.

legate între ele prin relaţia:

$$J_0 = J_x + J_y$$

Variația momentelor centrifugale în raport cu axe paralele

Folosind proprietăţile momentelor de inerţie, se demonstrează formula:

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} - a\,M\,x_C - b\,M\,y_C + a\,b\,M$$

unde x_C, y_C **sunt coordonatele centrului de masă *C* al sistemului de puncte.**

Dacă *O*=*C*, rezultă că $x_C = y_C = 0$ **şi relaţia dintre cele două produse de inerţie devine:**

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + M\,a\,b$$

EXEMPLE

https://www.youtube.com/watch?v=MboG3SWdh2U&ab_channel=MechanicaLEi

https://www.youtube.com/watch?v=uufTbEV-9KA&ab_channel=fizichim

https://www.youtube.com/watch?v=XausxW7Qxr0&ab_channel=fizichim

https://www.youtube.com/watch?v=CIcHIJTpp6k&ab_channel=WinSchool

1.3.1.1 Momentul unui vector în raport cu un pol

Fie un vector legat $\vec{v}$, cu punctul de aplicație A. Se numește vectorul $\vec{v}$ în raportcu un punct O, numit pol, produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație A al vectorului și vectorul $\vec{v}$, adica :

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v} = O\vec{A} \times \vec{v}$$

Unde s-a notat cu $\vec{r}$ vectorul de poziție al punctului de aplicație al vectorului față de O.

unde α este unghiul dintre $\vec{r}$ și $\vec{v}$.

$$\left|\vec{M}_O(\vec{v})\right| = \left|O\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \sin\alpha$$

Proprietăți ale momentului unui vector în raport cu un pol

1. $\left|\vec{M}_o(\vec{v})\right| = \left|\vec{v}\right| \cdot d$ unde d este distanța de la pol la suportul vectorului

2. Momentul unui vector în raport cu un pol este nul dacă vectorul este nul sau polul se află pe suportul vectorului.

3. Momentul unui vector în raport cu un pol nu se schimbă atunci când punctul de aplicație al vectorului se deplasează pe suportul său.

1.3.1.2 Momentul unui vector în raport cu o axă

Se numeşte **momentul unui vector în raport cu o axă** proiecția, pe acea axă, a momentului vectorului în raport cu un punct oarecare de pe axă.

$$M_\Delta(\vec{v}) = pr_\Delta \vec{M}_O(\vec{v}) = \left|\vec{M}_O(\vec{v})\right| \cdot \cos\alpha = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{r}, \vec{v}, \vec{u})$$

Unde α este unghiul dintre $\overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{v})$ și Δ.

Folosind un sistem cartezian de axe de coordonate, momentul unui vector, în raport cu o axă, se calculează cu formula :

$$M_\Delta(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$$

Este versorul axei Δ, $A(x, y, z)$, $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$, A fiind punctul de aplicație al vectorului $\vec{v}$.

1.3.1.3 Torsorul unui sistem de vectori alunecători

Se consideră un sistem de vectori alunecători $S = (\vec{V}_i)_{1\le i\le n}$.Față de un sistem cartezian de axe de coordonate Oxyz din spațiul euclidian tridimensional, vectorii sistemului se caracterizează prin componentele lor (X_i, Y_i, Z_i).

Se numeşte vectorul rezultant al sistemului de vectori S (rezultanta generală), notat cu $\vec{R}$(S), suma vectorilor din sistemul S.

$$\vec{R}(S) = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i ,(4)$$

Se numeşte vectorul moment rezultant al sistemului de vectori S, în raport cu un punct O, notat cu $\overrightarrow{M_0}$(S), vectorul egal cu suma momentelor vectorilor sistemului, în raport cu punctul O.

$$\vec{M}_O(S) = \sum_{i=1}^{n} O\vec{A}_i \times \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{V}_i \;.(5)$$

1.3.1.4 Sisteme echivalente de vectori alunecători. Sisteme echivalente de forţe

Două sisteme de vectori alunecători S şi S', pentru care $\tau_0(S)=\tau_0(S')$, $(\forall O)$

O – punct din spațiu, se numesc sisteme echivalente de vectori alunecători.

Pentru două sisteme echivalente de vectori alunecători se foloseşte notația S~S'.

$S \sim S' \Leftrightarrow \tau_0(S)=\tau_0(S'), (\forall O)$, O punct în spațiu.

Din definiția torsorului unui sistem de vectori, rezultă că, pentru două sisteme echivalente de vectori alunecători, sunt verificate relațiile

$$\vec{R}(S) = \vec{R}(S')$$

$$\overrightarrow{M_O}(S) = \overrightarrow{M_O}(S')$$

pentru orice punct O din spațiu.

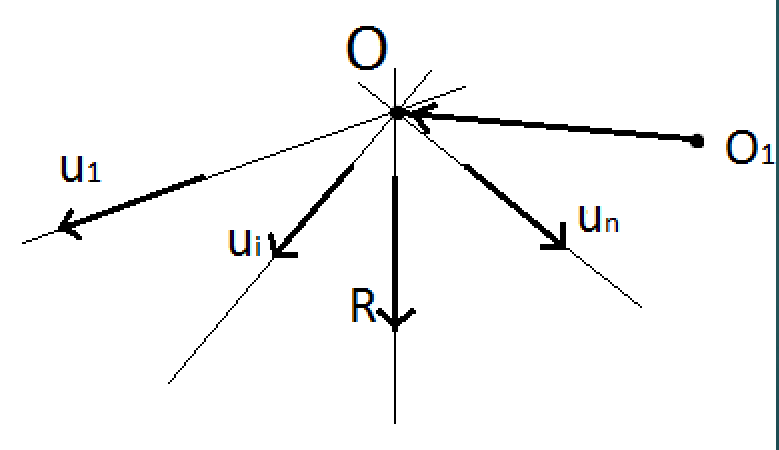
1.3.1.5 Teorema lui Varignon

Momentul vectorului rezultant al unui sistem de vectori concurenți, în raport cu un pol oarecare O, este egal cu vectorul moment rezultant al sistemului, în raport cu acelaşi pol O.

Demonstrație

Fie un sistem de *n* vectori $u_1, u_2, u_3, \dots\dots u_n$ care sunt concurente în punctul *O*. Rezultanta este:

R=$\sum_i u_i$



Momentul fiecărui vector este:

$\sum_i M_{O_1}^{u_i} = \sum(O - O_1)\ x\ u_i$

Considerând factorul comun (O-O_1) ,

$\sum_i M_{O_1}^{u_i}$=(0-O_1) x ($\sum_i u_i$)=(O-O_1) x R =$M_{O_i}^{R}$

1.3.1.6 Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători

Locul geometric al punctelor pentru care torsorul de reducere al unui sistem de vectori alunecători este minimal (modulul momentului rezultant minim) se numeşte axă centrală a sistemului de vectori alunecători.

Axa centrală a sistemelor de forțe este folosită în cazurile de reducere. Față de un sistem de axe de coordonate, ecuațiile axei centrale se scriu :

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z}$$

În cazul plan, ecuația axei central este:

$$xY - yX = M_O$$

1.3.1.7 Cazurile de reducere a sistemelor de vectori alunecători

- Cazul 1: $\vec{R}$=0, caz în care sistemul de vectori este echivalent cu $S_0 : S \sim S_0$, adică S este un sistem în echilibru.
- Cazul 2: $\vec{R}$=0,$\overrightarrow{M_0} \neq 0$. În această situație, sistemul este echivalent cu un cuplu de vectori, vectorii fiind situați într-un plan normal pe $\overrightarrow{M_0}$.
- Cazul 3: $\vec{R} \neq 0, \overrightarrow{M_0}$=0 caz în care sistemul este echivalent cu un vector unic $\vec{v} = \vec{R}$,aplicat în O
- Cazul 4: $\vec{R} \neq 0, \overrightarrow{M_0} \neq 0,$ cazul cel mai general, în care apar două situații care conduc la concluzii diferite.
- Cazul 4a: $\vec{R} \neq 0, \overrightarrow{M_0} \neq 0, \vec{R} \cdot \overrightarrow{M_0} = 0$

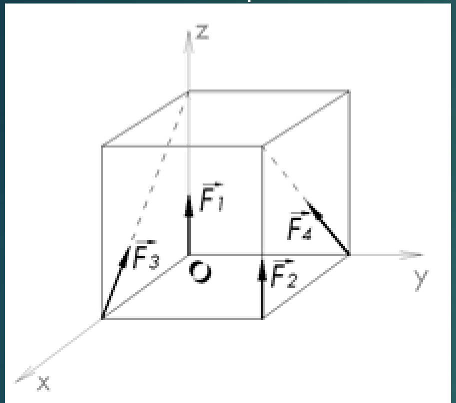
sistemul este echivalent cu un sistem format dintr-un vector unic $\vec{R}$, situat pe axa centrală .

Aplicație

Să se reducă sistemul de forțe aplicate pe laturile unui cub de latură *a*, în raport cu punctul O şi să se scrie torsorul de reducere în punctul *O*, dacă forțele sunt aplicate ca în fig. 2.22 şi modulele lor sunt: $F_1 = F_2 = P \quad F_3 = F_4 = P\sqrt{2}$.

Soluție

Componentele forțelor din figură, pe cele trei axe de coordonate, se scriu direct în tabel. Se calculează cele patru momente.



Forţa	F_x	F_y	F_z	M_{ox}	M_{oy}	M_{oz}
F_1	0	0	P	0	0	0
F_2	0	0	P	aP	-aP	0
F_3	-P	0	P	0	-aP	0
F_4	P	0	P	aP	0	-aP
Σ	0	0	4P	2aP	-2aP	-aP

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right) = 0.$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix} = -aP\vec{j} + aP\vec{i}$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_3\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ -P & 0 & P \end{vmatrix} = -aP\vec{j}$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_4\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ P & 0 & P \end{vmatrix} = aP\vec{i} - aP\vec{k}$$

Torsorul de reducere în *O* este : $\tau_O \begin{cases} \vec{R} = 4P\vec{k} \\ \vec{M}_O = 2aP\vec{i} - 2aP\vec{j} - aP\vec{k} \end{cases}$

Invariantul sistemului $\vec{R} \cdot \vec{M}_O$ este nenul, deci sistemul se reduce la o forță pe axa centrală şi la un cuplu de forțe.

<u>1. Momentul unui vector în raport cu un pol</u>

Momentul unui vector în raport cu un pol, este definit ca produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație A al vectorului și vectorul $\vec{v}$.

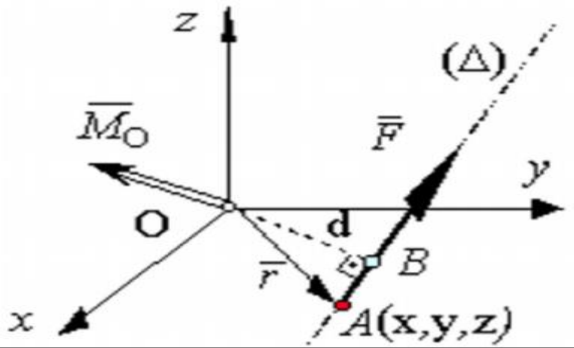
$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v} = O\vec{A} \times \vec{v}$$

Unde: $\vec{r}$ vectorul de poziție al punctului de aplicație al vectorului față de O; α este unghiul dintre $\vec{r}$ și $\vec{v}$;

<u>Variația momentului unui vector la schimbarea polului:</u>

Momentul unui vector în raport cu un alt pol O′ este egal cu suma dintre momentul vectorului în raport cu polul inițial O și produsul vectorial dintre vectorul de poziție al polului inițial O în raport cu noul pol O′ și vectorul dat.

$$\vec{M}_{O'}(\vec{v}) = M_O(\vec{v}) + \overrightarrow{O'O} \times \vec{v} = \vec{M}_O(\vec{v}) - O\vec{\vec{O'}}$$



2. Momentul unui vector în raport cu o axă

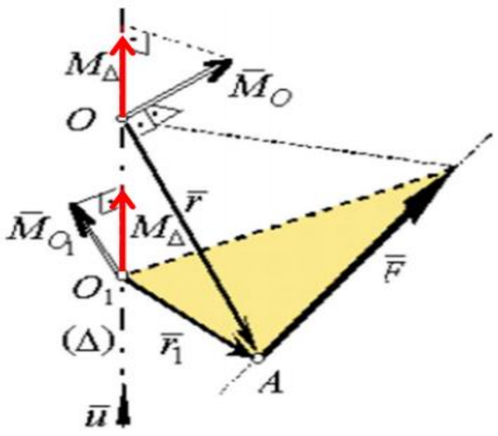
Momentul unui vector în rapoort cu o axă este definit ca proiecția, pe aceea axă, a momentului în raport cu un punct oarecare de pe axă.

$$M_{\Delta}(\vec{v}) = pr_{\Delta}\vec{M}_O(\vec{v}) = \left|\vec{M}_O(\vec{v})\right| \cdot \cos\alpha = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{r}, \vec{v}, \vec{u})$$

Unde: $\boldsymbol{\alpha}$ este unghiul dintre $\vec{M}_0(\vec{v})$ și Δ

Pentru determinarea momentului unui vector $\vec{v}$, în raport cu o axă Δ, folosim următorul sistem cartezian de axe de coordonate:

$$M_{\Delta}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$



3. Torsorul unui sistem de vectori alunecători

Pentru un sistem de vectori S, ansamblul de vectori $\left(\vec{R}(S), \vec{M}_O(S)\right)$, cu $\vec{R}(S)$ vectorul rezultant al sistemului S, iar $\vec{M}_O(S)$ vectorul moment rezultant al sistemului de vectori în raport cu polul O, se numeşte torsorul sistemului S în raport cu polul O şi se notează cu $\tau_O(S)$, adică:

$$\tau_O(S) = \left(\vec{R}(S), \overrightarrow{M_O}(S)\right)$$

Formula de variaţie a vectorului moment rezultant la schimbarea polului:

$$\overrightarrow{M_{O'}}(S) = \overrightarrow{M_O}(S) + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}(S) = \overrightarrow{M_O}(S) - \overrightarrow{OO'} \times \vec{R}(S)$$

Consecințe:

1.Vectorul moment rezultant nu se schimbă dacă $\overrightarrow{OO'} \times \vec{R}(S) = 0$, egalitate care are loc dacă $\vec{R}(S) = 0$ sau $\overrightarrow{OO'}$ este coliniar cu $\vec{R}(S)$, adică:

$$\overrightarrow{OO'} = \lambda \cdot \vec{R}(S)$$

2. Dacă $\overrightarrow{M_O}(S) = 0$ şi $\vec{R} = 0$, atunci, pentru orice $O' \in E_3$, $\overrightarrow{M_{O'}}(S) = 0$.

3. Dacă $\vec{R}(S) = 0$, rezultă că $\overrightarrow{M_O}(S) = \overrightarrow{M_{O'}}(S)$, $(\forall) O' \in E_3$.

4. Sisteme echivalente de vectori alunecători. Sisteme echivalente de forţe

Se consideră ca operaţii elementare, operaţiile care transformă un sistem de vectori în altul, echivalent cu acesta. Următoarele operaţii sunt operaţii elementare de echivalenţă:

1) înlocuirea unor vectori concurenţi, aparţinînd sistemului dat, cu alţi vectori concurenţi în acelaşi punct şi având aceeaşi rezultantă;

2) alunecarea unui vector al sistemului pe suportul său;

3) introducerea, pe un suport, a doi vectori egali în modul şi de sens contrar, respectiv eliminarea de pe un suport a doi vectori egali în modul şi de sens contrar.

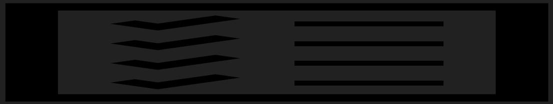
Din definiţia torsorului unui sistem de vectori, rezultă că, pentru două sisteme echivalente de vectori alunecători, sunt verificate relaţiile:

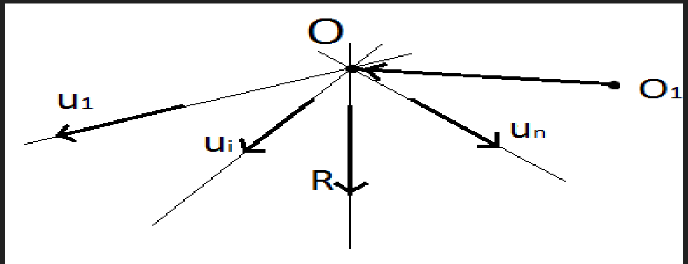
$$\vec{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{S}) = \vec{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{S}')$$

5.Teorema lui Varignon

Momentul vectorului rezultant al unui sistem de vectori concurenţi, în raport cu un pol oarecare O, este egal cu vectorul moment rezultant al sistemului, în raport cu acelaşi pol O.

În mecanica solidului rigid, **teorema lui Varignon** susține că momentul în raport cu un punct al rezultantei unui sistem de forțe concurente este egal cu suma algebrică a momentelor forțelor componente în raport cu același punct:





6. Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători

Ecuațiile axei centrale a unui sistem de forță in cazul de reducere:

$$\frac{M_x - yZ + zY}{X} = \frac{M_y - zX + xZ}{Y} = \frac{M_z - xY + yX}{Z}$$

Ecuația axei centrale în cazul plan:

$$xY - yX = M_O$$

În punctul axei centrale modulul momentului de rezistență își atinge minimul:

| M_o | = radical din $(M_R^2+M_n^2) \geq |M_R|$

7.Cazurile de reducere a sistemelor de vectori alunecători

Orice sistem se poate reduce la un sist format dintr-un vector resultant aplicat intr-un pct arbitrar O si la un cuplu al carui moment este egal cu mom rez in O al sist.

$$S = M(v,f) = M_o$$

Orice sitem se reduce la torsorul sau in O cu cond ca M_o sa reprez un cuplu

Cazuri de reducere

1. $R \neq 0$

M_0=axa centrala ca trece prin O

2. $R = 0$

1) $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 = 0$, caz în care sistemul de vectori este echivalent cu S_0: S~S_0, adică S este un sistem în echilibru.

2) $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 \neq 0$. În această situaţie, sistemul este echivalent cu un cuplu de vectori, vectorii fiind situaţi într-un plan normal pe $\vec{M}_0$

3) $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_O = 0$, caz în care sistemul este echivalent cu un vector unic $\vec{v} = \vec{R}$, aplicat în O.

4) $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, cazul cel mai general, în care apar două situaţii care conduc la concluzii diferite.

Aplicație

Să se reducă sistemul de forţe aplicate pe laturile unui cub de latură a, în raport cu punctul O şi să se scrie torsorul de reducere în punctul O, dacă forţele sunt aplicate ca în fig. 2.22 şi modulele lor sunt: $F_1 = F_2 = P \quad F_3 = F_4 = P\sqrt{2}$.

Rezolvare:

Componentele forţelor din figură, pe cele trei axe de coordonate, se scriu direct în tabel. Se calculează cele patru momente.

$\vec{M}_O(\vec{F}_1) = 0.$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_2) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix} = -aP\vec{\jmath} + aP\vec{\imath}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_3) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ -P & 0 & P \end{vmatrix} = -aP\vec{\jmath}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_4) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ P & 0 & P \end{vmatrix} = aP\vec{\imath} - aP\vec{k}$$

Forța	F_x	F_y	F_z	M_{ox}	M_{oy}	M_{oz}
F_1	0	0	P	0	0	0
F_2	0	0	P	aP	-aP	0
F_3	-P	0	P	0	-aP	0
F_4	P	0	P	aP	0	-aP
Σ	0	0	4P	2aP	-2aP	-aP

Statica punctului material liber

- Statica punctului material se ocupă de determinarea condiţiilor în care punctul *M* rămâne în repaus, adică îşi păstrează neschimbată poziţia faţă de sistemul de axe de coordonate. Este vorba de aşa-numitele ***condiţii de echilibru***

Teorema 1

- Condiţia necesară şi suficientă ca un punct material, aflat sub acţiunea unui sistem de forţe, să fie în echilibru este ca rezultanta a sistemului de forţe să fie nulă.

$$\vec{R} = 0 \,,$$

adică

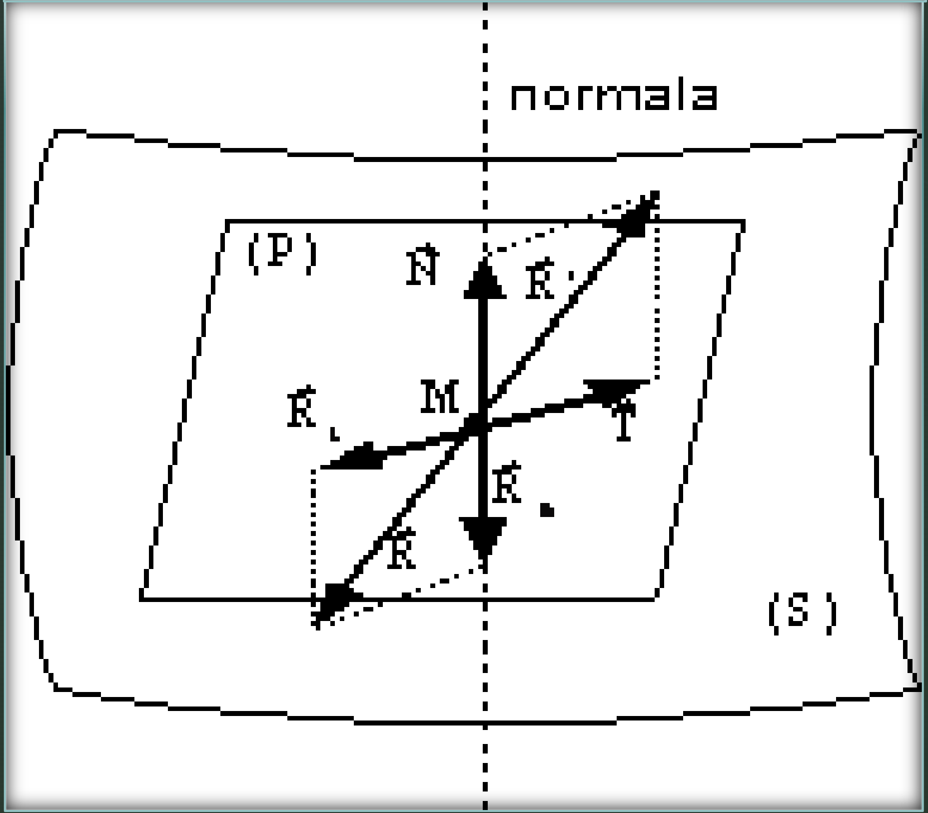
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

Asta înseamnă că...

- Poziţia unui punct material este determinată de trei parametri scalari, spre exemplu coordonatele carteziene *x,y,z* ale acestuia. Dacă nu există constrângeri de natură geometrică asupra punctului, poziţia lui este definită de trei parametri scalari independenţi şi spunem că punctul material are trei grade de libertate.

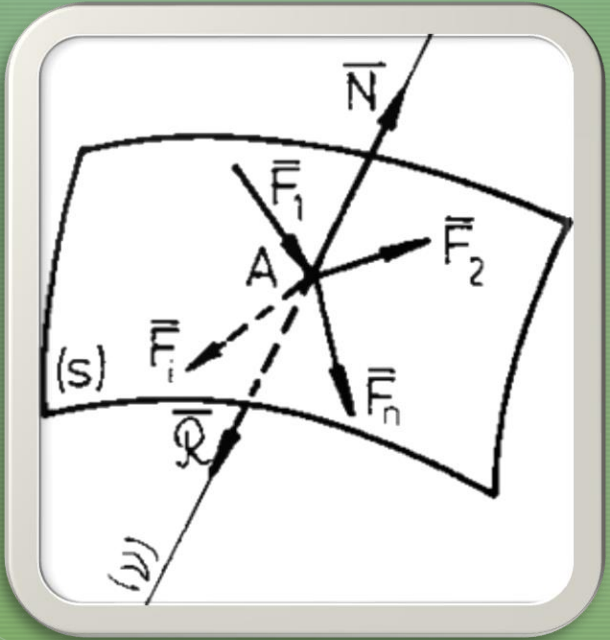
În cazul sistemului de forţe în spaţiu, faţă de un sistem de axe de coordonate în raport cu care forţele $\vec{F}_i$ au componentele F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, această condiţie vectorială este echivalentă cu trei condiţii scalare,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$



Statica punctului material supus la legături

- Dacă punctul material este supus unor constrângeri de natură geometrică, spre exemplu este obligat să rămână pe o suprafaţă sau pe o curbă, atunci spunem că punctul material este supus la legături.



Condiţii necesare şi suficiente de echilibru pentru punctul material supus la legături

- Dacă punctul material se reazemă pe o suprafaţă netedă (fără frecare), condiţia necesară şi suficientă de echilibru este ca rezultanta forţelor efectiv aplicate punctului să fie dirijată după normala la suprafaţă în punctul considerat.
- Dacă punctul se reazemă pe o curbă netedă, condiţia necesară şi suficientă pentru ca punctul să rămână în echilibru pe curbă este ca rezultanta forţelor efectiv aplicate punctului material să aibă suportul în planul normal la curbă în punctul considerat.

Legături prin fire

- În cazul în care punctul material interacţionează cu un alt punct material sau cu un solid rigid prin intermediul unui fir mereu întins sau prin intermediul unei bare rigide, apare aşa-numita legătură prin fir. Dacă lungimea firului este constantă, atunci legătura constrânge punctul material să se menţină pe o suprafaţă sferică.

Legături prin fire

- Din acest motiv, în general, această legătură nu se tratează separat, fiind considerată ca un caz particular al legăturii impuse punctului material de a rămâne pe o suprafaţă. Forţa de legătură trebuie să fie normală la suprafaţa sferei, deci pe direcţia normalei în punct la sferă, care coincide cu direcţia firului. Aceasta se numeşte tensiunea (efortul) din fir.

Statica punctului material supus la legături cu frecare

- În cazul legăturilor ideale, componenta tangenţială a reacţiunii se neglijează. În realitate, legăturile nu sunt ideale. Punctul material supus la legături se reazemă pe curbe şi suprafeţe rugoase (aspre) şi nu netede, aşa cum se presupune în cazul legăturilor ideale. În aceste condiţii, componenta tangenţială a forţei de legătură, numită forţă de frecare de alunecare, nu mai poate fi neglijată.

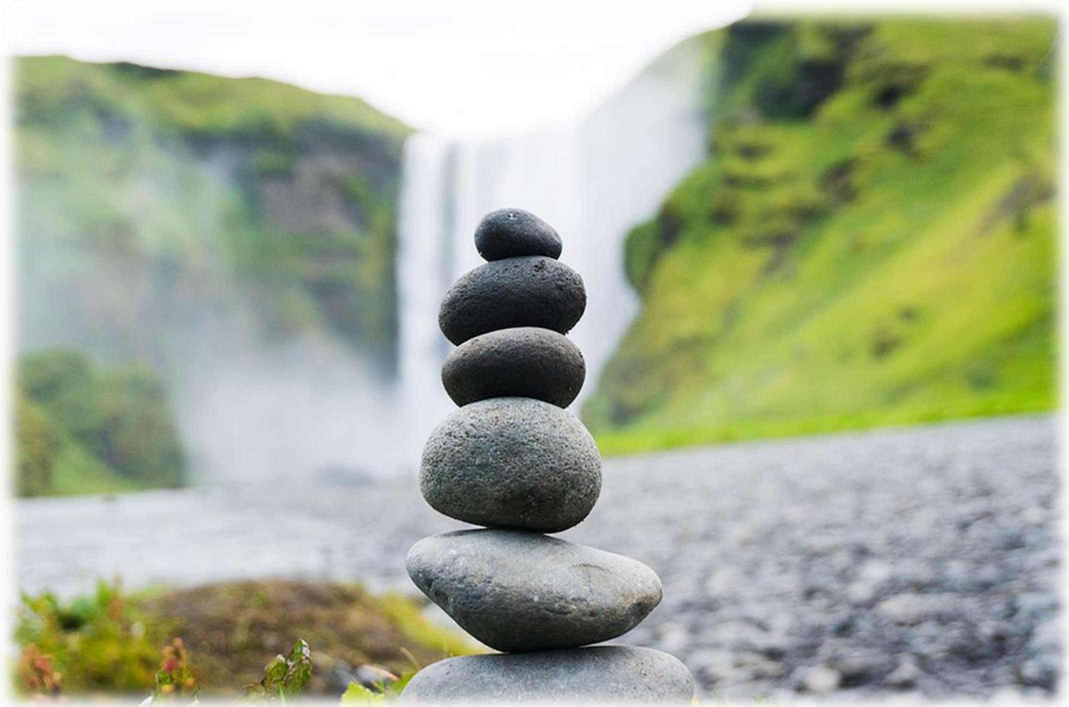
Statica punctului material supus la legături cu frecare

- Folosind legile frecării uscate ale lui Coulomb rezultă că forţa de frecare are următoarele proprietăţi:
- are direcţia tangentă la curbă sau la suprafaţă;
- sensul este invers tendinţei de alunecare;
- pentru ca punctul material să rămână în repaus pe suprafaţă (curbă), modulul forţei de frecare nu trebuie să depăşească Tmax din legile lui Coulomb

Statica punctului material liber

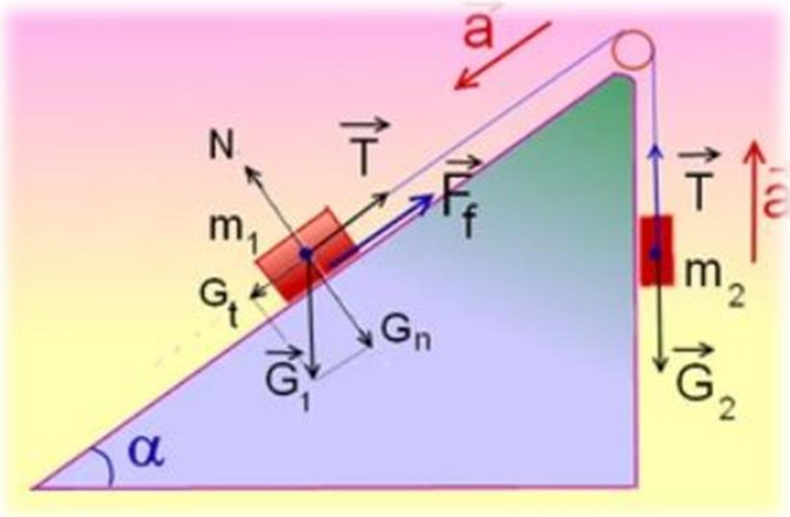
Statica punctului material se referă la condițiile în care un anumit punct rămâne în repaus, adică îşi păstrează neschimbată poziția față de sistemul de axe de coordonate.

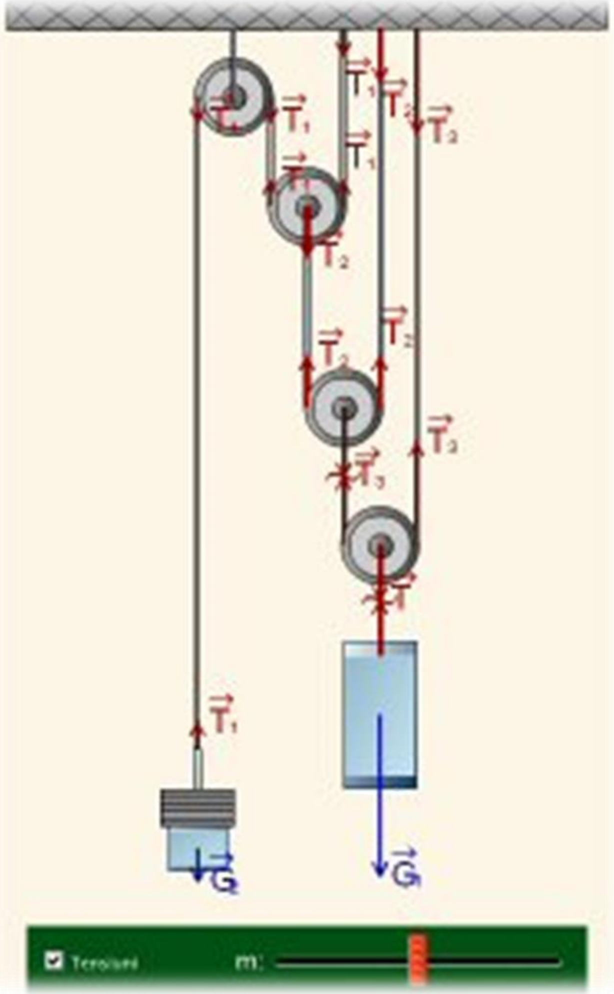
Pentru ca punctul nostru să rămână fix avem nevoie de anumite ***condiții de echilibru***.



Condiții

- Condiția ca un punct material, aflat sub acțiunea unui sistem de forțe, să fie in echilibru este ca rezultanta sistemului de forțe să fie nulă;
- $\vec{R} = 0$
- Condiția ca un punct material să se afle în echilibru este ca rezultanta tuturor forțelor să fie nulă.
- $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$

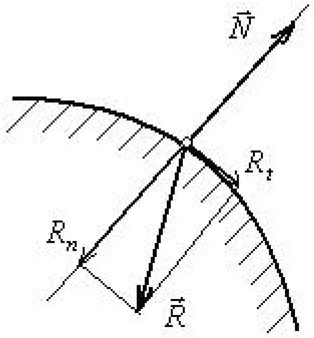




$\vec{T}_1$
$\vec{T}_2$
$\vec{T}_3$
$\vec{G}_1$
$\vec{G}_2$
m:

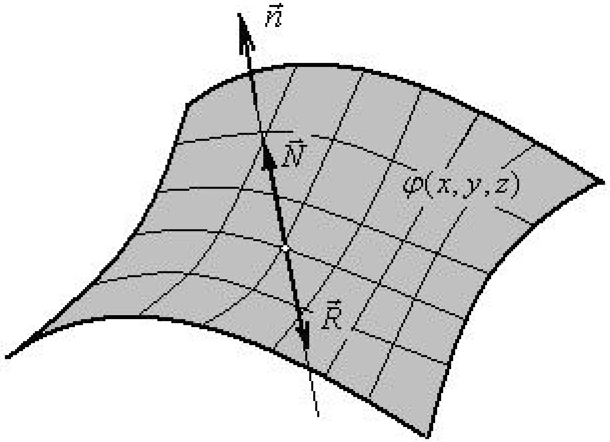
Statica punctului material supus la legături fără frecare

- Dacă punctul material se reazemă pe o suprafață netedă (fără frecare), condiția de echilibru este ca rezultanta forțelor aplicate punctului să fie dirijată după normala la suprafață în punctul considerat.
- Dacă punctul se reazemă pe o curbă netedă, condiția pentru ca punctul să rămână în echilibru pe curbă este ca rezultanta forțelor aplicate punctului material să aibă suportul în planul normal la curbă în punctul considerat.



$R_t \neq 0$ *provoacă mişcarea*

$R_t = 0$ *echilibru*




MTB
wild spirit

Legături prin fire

- În cazul în care punctul material interacționează cu un alt punct material sau cu un solid rigid prin intermediul unui fir mereu întins sau prin intermediul unei bare rigide, apare aşa-numita legătură prin fir.
- Dacă lungimea firului este constantă, atunci legătura constrânge punctul material să se mențină pe o suprafață sferică.
- Din acest motiv, în general, această legătură nu se tratează separat, fiind considerată ca un caz particular al legăturii impuse punctului material de a rămâne pe o suprafață.
- Forța de legătură trebuie să fie normală la suprafața sferei, deci pe direcția normalei în punct la sferă, care coincide cu direcția firului. Aceasta se numeşte tensiunea (efortul) din fir

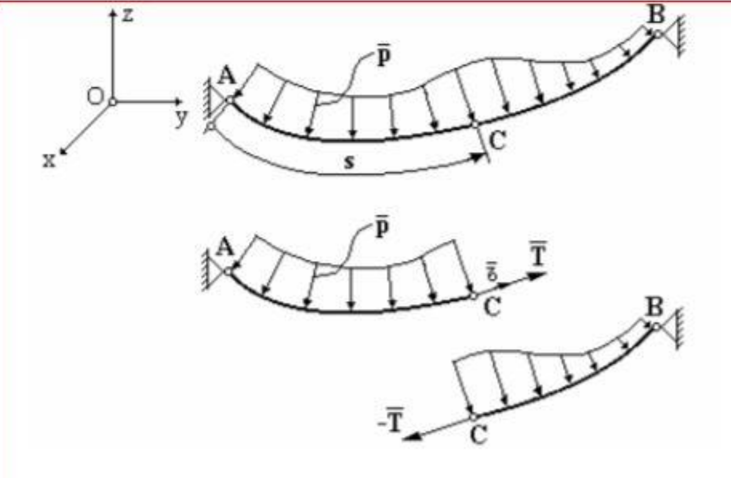


Fig.5.1 Fir solicitat de o forță distribuită

Condiții necesare şi suficiente de echilibru pentru punctul material supus la legături

În cazul unui punct material aflat sub acțiunea unui sistem de forțe active de rezultantă $\vec{R}$ obligat să rămână pe o suprafață aspră, condiția de echilibru este ca suportul rezultantei $\vec{R}$ forțelor efectiv aplicate să facă cu normala la suprafață un unghi mai mic sau cel mult egal cu unghiul de frecare.

Pentru ca un punct material, aflat sub acțiunea unui sistem de forțe efectiv aplicate, să se găsească în echilibru pe o suprafață aspră este necesar ca suportul rezultantei $\vec{R}$ efectiv aplicate punctului să se afle în interiorul sau, la limită, pe suprafața laterală a conului de frecare.

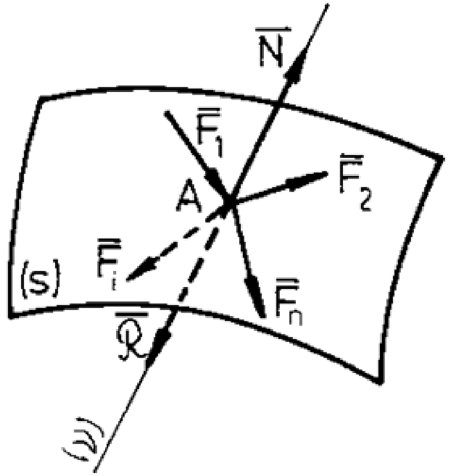



Statica punctului material supus la legături cu frecare

În cazul legăturilor ideale, componenta tangențială a reacțiunii se neglijează. În realitate, legăturile nu sunt ideale. Punctul material supus la legături se reazemă pe curbe şi suprafețe rugoase (aspre) şi nu netede, aşa cum se presupune în cazul legăturilor ideale. În aceste condiții, componenta tangențială a forței de legătură, numită forță de frecare de alunecare, nu mai poate fi neglijată.

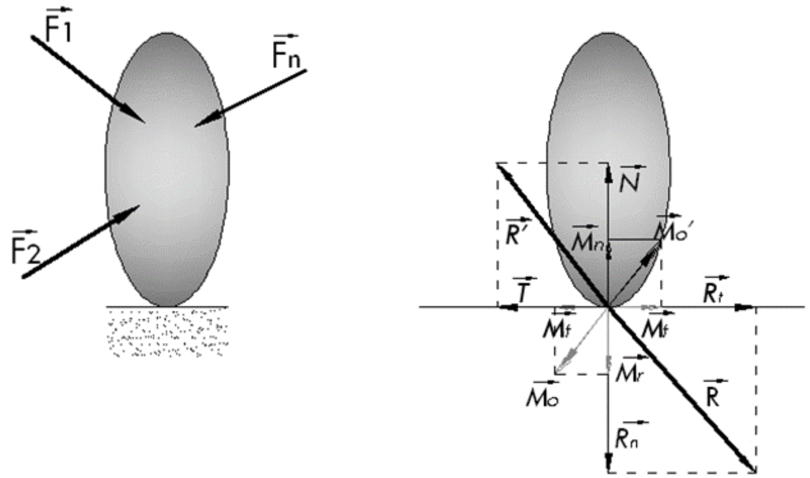
Folosind legile frecării uscate ale lui Coulomb rezultă că forța de frecare are următoarele proprietăți:

- are direcția tangentă la curbă sau la suprafață;
- sensul este invers tendinței de alunecare;
- pentru ca punctul material să rămână în repaus pe suprafață (curbă), modulul forței de frecare să nu depașească T_{max}.



1.3.4 STATICA SOLIDULUI RIGID SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARE. STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

- **1.3.4.1 Aspectul general al frecărilor în cazul reazemului simplu**
- **1.3.4.1.1 Generalităţi**
- În cazul reazemului simplu, s-a considerat că solidul rezemat are contact cu solidul pe care se reazemă într-un singur punct. În realitate, contactul nu are loc într-un singur punct, ci pe o suprafaţă mică din jurul punctului teoretic de contact. În fiecare punct al acestei suprafeţe, apare o reacţiune (Ri) , de mărime şi direcţie necunoscute.



$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t;\quad \vec{R}' = \vec{N} + \vec{T};\quad \vec{\mathrm{M}}_0 = \vec{\mathrm{M}}_n + \vec{\mathrm{M}}_t;\quad \vec{M}'_0 = \vec{M}_p + \vec{M}_r$$

1.3.4 STATICA SOLIDULUI RIGID SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARE. STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

Pentru echilibru, conform legilor lui Coulomb, aplicate pentru fiecare formă de frecare în parte, se obţin condiţiile:

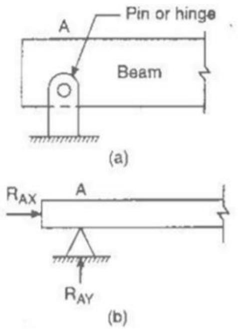
$$\left|\vec{T}\right| \leq \mu\left|\vec{N}\right| \quad \left|\vec{M}_p\right| \leq \nu\left|\vec{N}\right| \quad \left|\vec{M}_r\right| \leq s\left|\vec{N}\right|$$

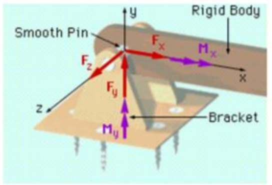
Unde μ este coeficient de frecare de alunecare, se numeşte ν coeficient de frecare de pivotare, de dimensiunea unei lungimi şi s coeficient de frecare de rostogolire, având, de asemenea, dimensiunea unei lungimi

REAZEME ARTICULATE

- Articulaţia este legătura care obliga un punct al unui solid sa se găsească intr-un punct fix in spaţiu.
- Articulaţia poate fi:
- - sferică: sunt anulate solidului rigid 3 grade de libertate lăsând posibile numai rotaţiile acestuia în raport cu axele rectangulare ale sistemului (sistem de forte in spaţiu);
- - cilindrică: sunt anulate doua din cele trei grade de libertate ale solidului; singura posibilitatea pe care o are corpul este o rotaţiei în jurul unei axe perpendiculare pe planul forţelor (sistem de forte in plan).

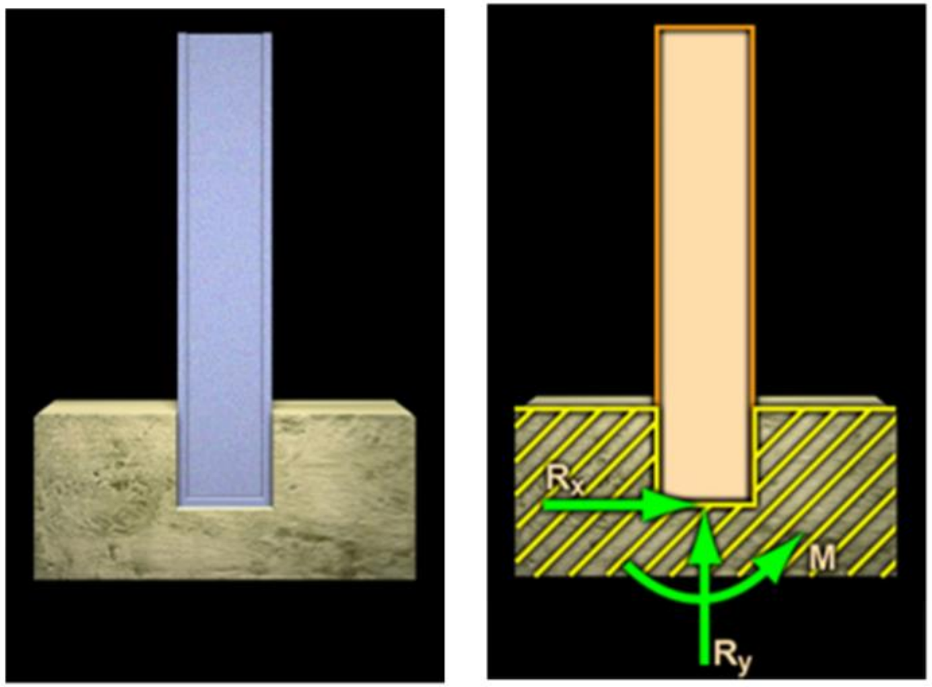
Reazeme articulate





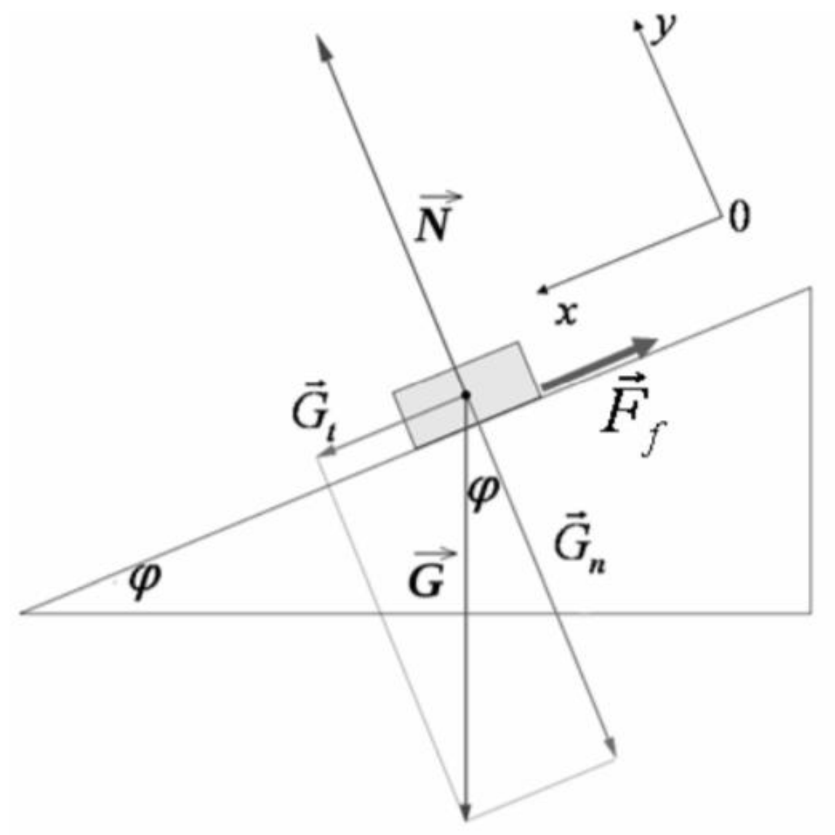
INCASTRAREA

- Încastrarea este legătura care suprimă unui rigid toate gradele de libertate. Corpul nu mai are nici o posibilitate de mişcare.



1.3.4.1.2 FRECAREA DE ALUNECARE

- Frecarea de alunecare este importantă la jgheaburi, folosite pentru transmiterea sau frânarea unor mişcări, la şurubruri etc.
- Forța de frecare la alunecare nu depinde de aria suprafeței de contact dintre corpuri, ci doar de natura și gradul de șlefuire a suprafețelor aflate în contact.
- Forța de frecare la alunecare este proporțională cu forța de apăsare normală exercitată pe suprafața de contact.



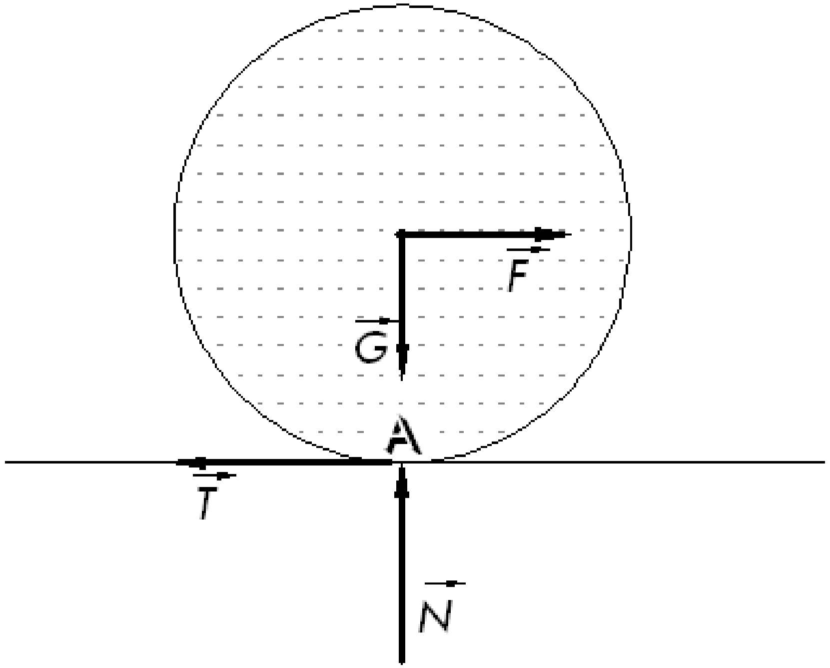
1.3.4.1.3 FRECAREA DE ROSTOGOLIRE

- Se consideră o roată de rază *R*, asupra căreia acţionează forţele F și G prima pe direcţie orizontală, cealaltă verticală. S-a notat cu Mr cuplul de frecare de rostogolire. Condiţiile de echilibru sunt:

$$\vec{N} + \vec{G} = 0$$

$$\vec{T} + \vec{F} = 0$$

- În practică, forţele N şi T se consideră ca având punctul de aplicaţie în punctul teoretic de contact, iar momentul de frecare de rostogolire se reprezintă în jurul acestui punct.



1.3.4.2 STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

- Dacă *S* este un sistem de puncte materiale sau de corpuri: A_1, ..., A_n , forțele care acționează asupra lui *S* pot fi:

1. - forte exterioare Fi , exercitate de corpuri dinafara sistemului asupra unui corp din sistem;
2. - forte interioare Fu, exercitate de către celelalte corpuri ale sistemului asupra unui corp din sistem. Notând cu forța cu care corpul acționează asupra corpului , conform principiului acțiunii și reacțiunii, se scrie:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

1.3.4.2 STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

- **Teorema solidificarii**:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

Sistemul de corpuri, pentru care torsorul forţelor interioare este nul, poate fi considerat ca un singur corp asupra căruia acţionează forţele exterioare efectiv aplicate sistemului şi forţele exterioare de legătură.

- **Teorema echilibrului partilor**:

Dacă într-un sistem de puncte materiale sau de corpuri, acţionat de un sistem de solicitări (forţe şi momente) în echilibru şi supus unor legături mecanice, se izolează un subsistem, acesta este în echilibru sub acţiunea forţelor ce acţionează asupra lui (forţe active şi forţe de legătură exterioare şi interioare, datorate legăturilor cu restul de subsisteme din sistem).

ASPECTUL GENERAL AL FRECĂRILOR ÎN CAZUL REAZEMULUI SIMPLU

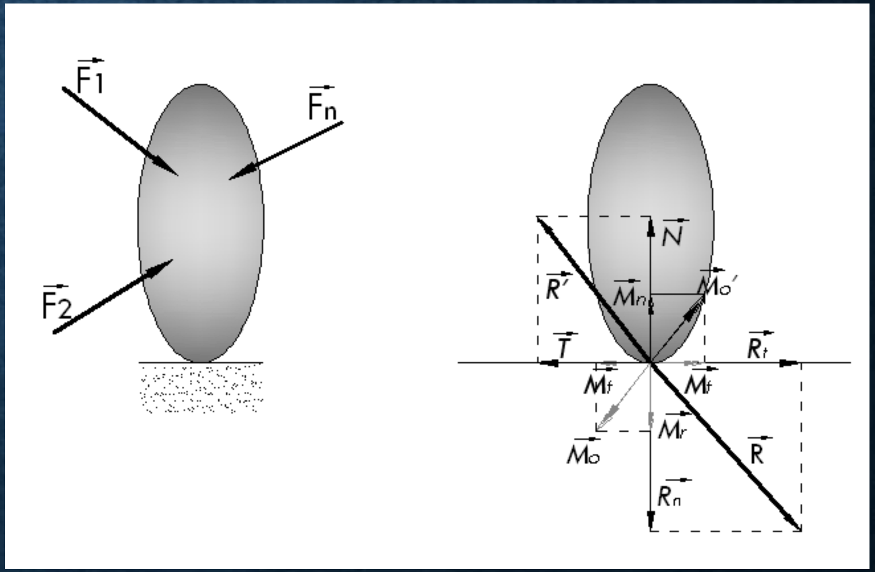
1.3.4.1.1 Generalităţi

În cazul reazemului simplu, s-a considerat că solidul rezemat are contact cu solidul pe care se reazemă într-un singur punct. În realitate, contactul nu are loc într-un singur punct, ci pe o suprafaţă mică din jurul punctului teoretic de contact. În fiecare punct al acestei suprafeţe, apare o reacţiune $\vec{R}_i$, de mărime şi direcţie necunoscute. Se reduc sistemele de forţe efectiv aplicate la torsorul $(\vec{R}, \vec{M}_0)$ şi reacţiunile la $(\vec{R}', \vec{M}_0')$

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t, \quad \vec{R}' = \vec{N} + \vec{T}, \quad \vec{M}_0 = \vec{M}_n + \vec{M}_t, \quad \vec{M}_0' = \vec{M}_p + \vec{M}_r$$

Pentru echilibru, se obțin următoarele condiții:

$$\vec{R}_n + \vec{N} = 0, \quad \vec{M}_n + \vec{M}_p = 0, \quad \vec{R}_t + \vec{T} = 0, \quad \vec{M}_t + \vec{M}_r = 0$$



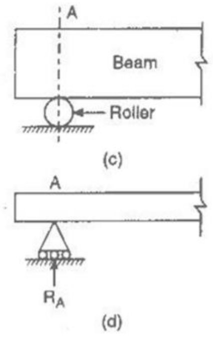
Sistemul de forţe $(\vec{F}_i)_{1\le i\le n}$ este echivalent cu două forţe $\vec{R}_n$, $\vec{R}_t$ şi două cupluri, de momente $\vec{M}_n$, $\vec{M}_t$.

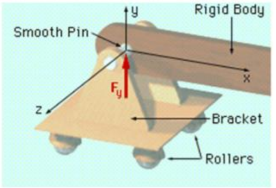
- Componenta $\vec{R}_n$ tinde să deplaseze corpul în direcţia normalei la suprafaţa de contact.
- Se opune reacţiunea normală $\vec{N}$.
- Forţa $\vec{R}_t$ tinde să deplaseze corpul în planul tangent, deplasare care constituie o alunecare, împiedicată de rezistenţa $\vec{T}$, numită forţă de frecare de alunecare.
- $\vec{M}_r$ tinde să rotească corpul în jurul normalei, ceea ce se numeşte pivotare.
- Se opune $\vec{M}_p$, numit cuplu de frecare de pivotare. Cuplu de moment $\vec{M}_t$ tinde să rotească corpul în jurul unei axe din planul tangent, mişcare numită rostogolire.
- Se opune $\vec{M}_r$, cuplu de frecare de rostogolire.
- Pentru echilibru, conform legilor lui Coulomb, aplicate pentru fiecare formă de frecare în parte, se obţin condiţiile

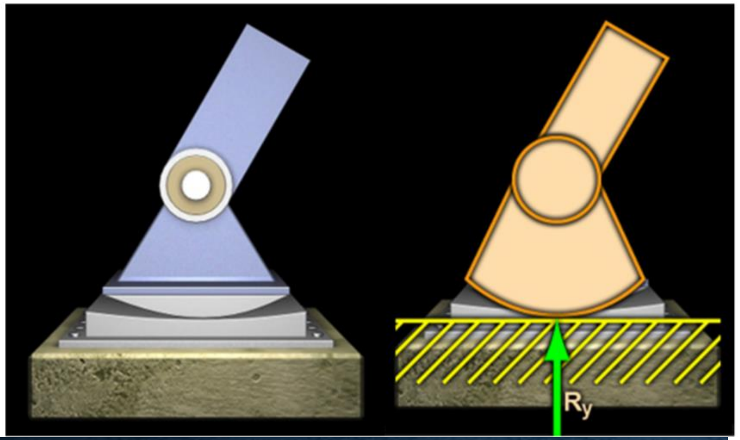
$$\left|\vec{T}\right| \le \mu\left|\vec{N}\right|, \left|\vec{M}_p\right| \le \nu\left|\vec{N}\right|, \left|\vec{M}_r\right| \le s\left|\vec{N}\right|$$

unde μ este coeficient de frecare de alunecare, ν se numeşte coeficient de frecare de pivotare, de dimensiunea unei lungimi şi s coeficient de frecare de rostogolire, având, de asemenea, dimensiunea unei lungimi.

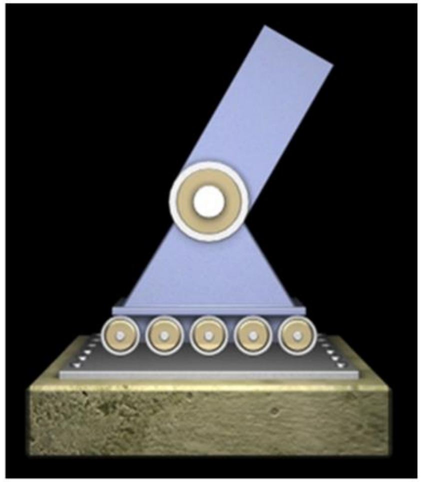
Reazeme simple

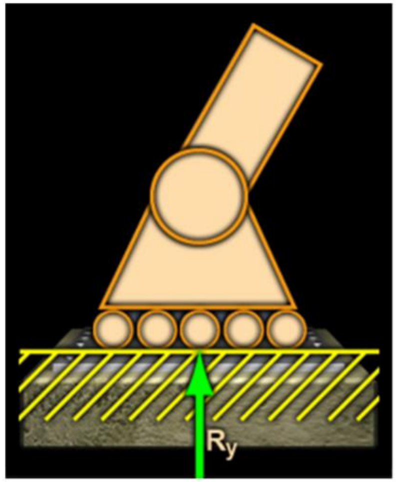




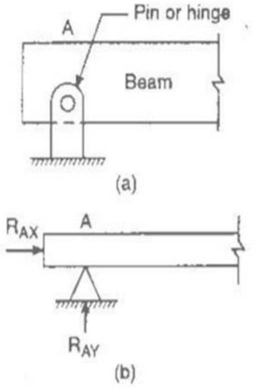


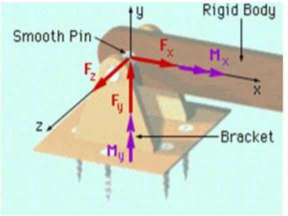
Reazeme simple



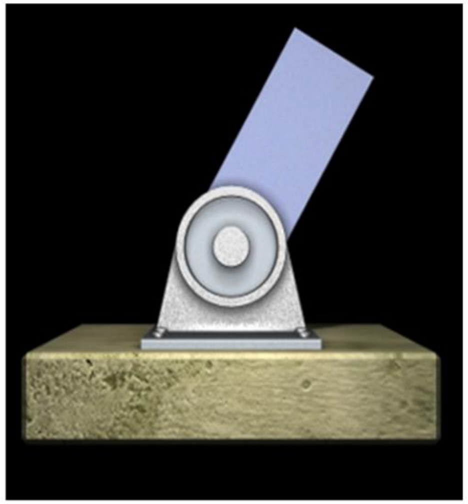


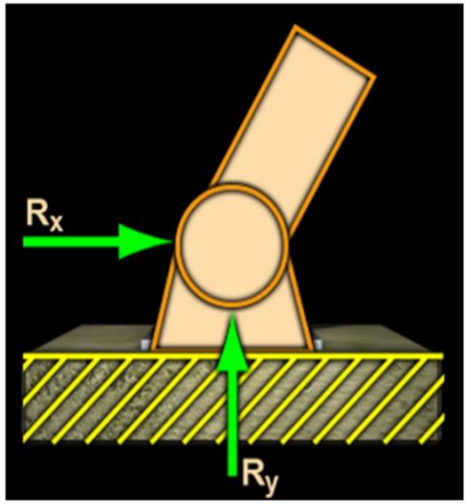
Reazeme articulate





Reazeme articulate





1.3.4.1.2 Frecarea de alunecare

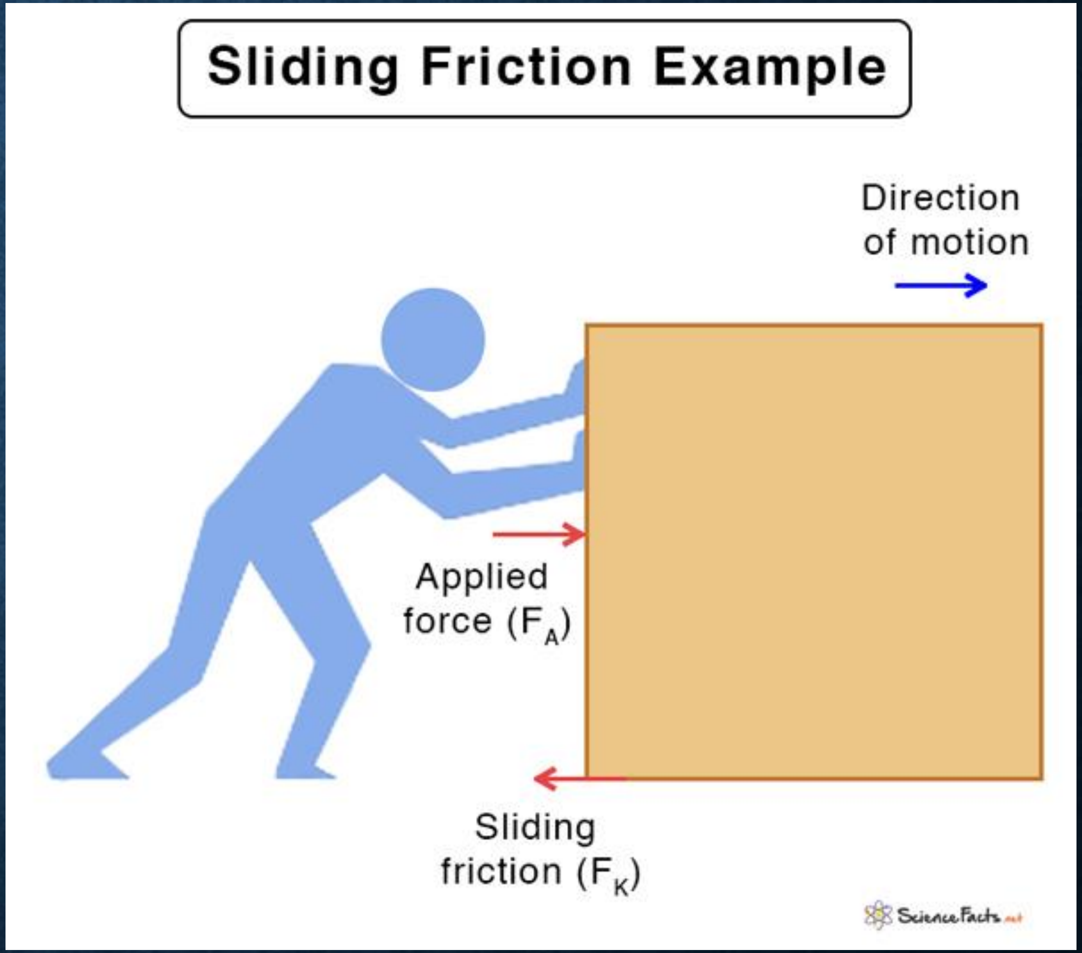
Ca şi în cazul punctului material, din teoremele frecării uscate ale lui Coulomb, condiţiilor de echilibru li se adaugă şi condiţia

$$\left|\vec{T}\right| \leq \mu\left|\vec{N}\right|$$

unde μ este coeficient de frecare de alunecare. Complicaţia apare din faptul că rigidul este rezemat, în general, în mai multe puncte, deci se scriu mai multe relaţii de forma

$$\left|\vec{T}_i\right| \leq \mu\left|\vec{N}_i\right|$$

şi nu se ştie exact tendinţa de alunecare. Frecarea de alunecare este importantă la jgheaburi, folosite pentru transmiterea sau frânarea unor mişcări, la şurubruri etc.



1.3.4.1.3 Frecarea de rostogolire

Se consideră o roată de rază *R*, asupra căreia acţionează forţele $\vec{F}$ şi $\vec{G}$, prima pe direcţie orizontală, cealaltă verticală. S-a notat cu $\vec{M_r}$ cuplul de frecare de rostogolire. Condiţiile de echilibru sunt

$$\vec{N} + \vec{G} = 0$$

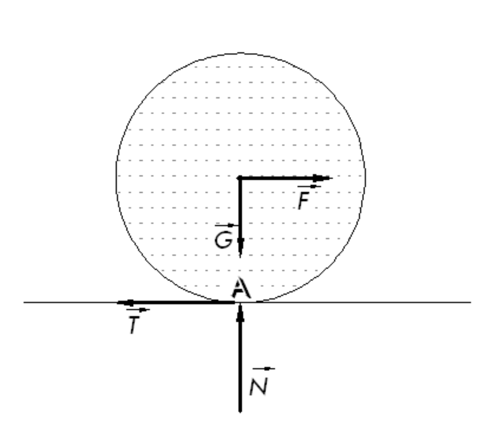
$$\vec{T} + \vec{F} = 0$$

Cuplul $(\vec{F}, \vec{T})$ provoacă rostogolirea sau o tendinţă de rostogolire a roţii, iar cuplul $(\vec{G}, \vec{N})$, de moment $M_r = sN$, se opune rostogolirii sau tendinţei de rostogolire. De aceea, pentru echilibru, condiţiilor de mai sus, li se adaugă şi condiţia

$$\left|\vec{M_r}\right| \leq s\left|\vec{N}\right|$$

unde *s* este coeficientul de frecare de rostogolire introdus prin

relaţiiile şi are dimensiunea unei lungimi.



Se consideră că suprafaţa pe care se rostogoleşte roata este deformabilă, ceea ce se întâmplă în realitate. Faptul că punctul de aplicaţie al forţei $\vec{N}$ nu poate fi punctul teoretic de contact *A*, rezultă din calculele de mai jos. Momentul forţei $\vec{F}$ în raport cu punctul *A* se scrie

$$M_A = -FR = 0$$

de unde rezultă că $F = 0$, ceea ce nu se întâmplă în realitate, pentru că asupra corpului poate acţiona o forţă orizontală, care să nu depăşească o anumită limită. Cum există deformaţii, apare cuplul de moment $M_r = N.e.$ Condiţiile de echilibru devin $F - T = 0$, $N - G = 0$, $M_r - FR = 0$, de unde se obţine $N = G$, $F = \frac{M_r}{R}$, $T = \frac{M_r}{R}$.

Din cele stabilite mai sus rezultă că, în cazul echilibrului roţii pe cale, când apar $\vec{M}_r$ şi $\vec{T}$, trebuie să se ţină cont de ambele condiţii

$$|\vec{T}| \le \mu \cdot |N|, \quad |M_r| \le s \cdot |\vec{N}|$$

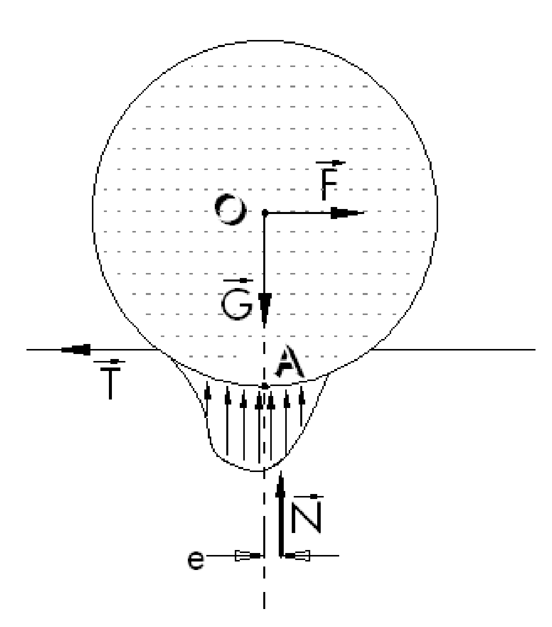
În general, la rostogolirea roţii pe cale, apar patru cazuri:

a) $|\vec{T}| \le \mu \cdot |N|, \quad |M_r| \le s \cdot |\vec{N}|$, caz în care corpul se află în repaus;

b) $|\vec{T}| \le \mu \cdot |N|, \quad |M_r| > s \cdot |\vec{N}|$, când corpul se rostogoleşte fără să alunece (rostogolire pură);

c) $|\vec{T}| > \mu \cdot |N|, \quad |M_r| \le s \cdot |\vec{N}|$ pentru corpul care alunecă fără rostogolire (alunecare pură);

d) $|\vec{T}| > \mu \cdot |N|, \quad |M_r| > s \cdot |\vec{N}|$, corpul alunecă şi se rostogoleşte;



1.3.4.2 Statica sistemelor de corpuri

Dacă *S* este un sistem de puncte materiale sau de corpuri: A_1, ..., A_n , forţele care acţionează asupra lui *S* pot fi:

- - forte exterioare $\vec{F}_i$, exercitate de corpuri dinafara sistemului asupra unui corp din sistem;
- forte interioare, exercitate de către celelalte corpuri ale sistemului asupra unui corp din sistem. Notând cu $\vec{F}_{ij}$ forţa cu care corpul A_j acţionează asupra corpului A_i, conform principiului acţiunii şi reacţiunii, se scrie

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

TEOREME

Teorema solidificării

- Sistemul de corpuri, pentru care torsorul forţelor interioare este nul, poate fi considerat ca un singur corp asupra căruia acţionează forţele exterioare efectiv aplicate sistemului şi forţele exterioare de legătură.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

Teorema echilibrului părţilor

- Dacă într-un sistem de puncte materiale sau de corpuri, acţionat de un sistem de solicitări (forţe şi momente) în echilibru şi supus unor legături mecanice, se izolează un subsistem, acesta este în echilibru sub acţiunea forţelor ce acţionează asupra lui (forţe active şi forţe de legătură exterioare şi interioare, datorate legăturilor cu restul de subsisteme din sistem).
- Principiul echilibrului părţilor revine la a folosi faptul că toate corpurile din sistem sunt în echilibru.

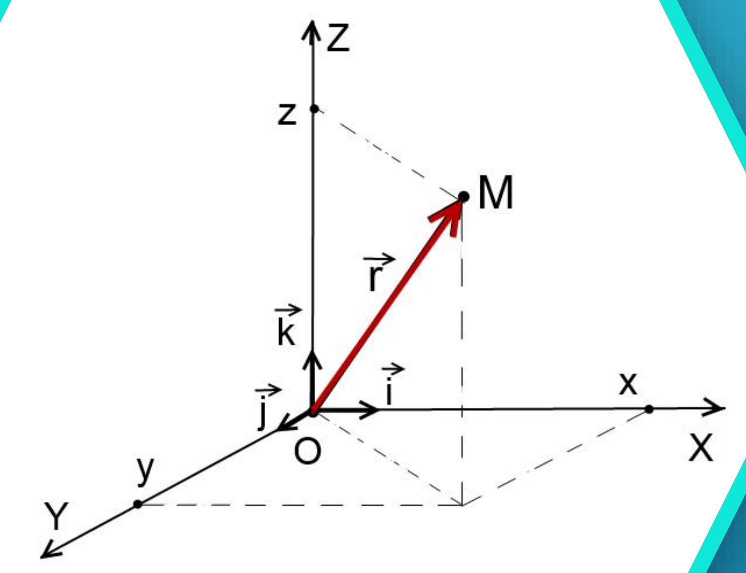
Notiuni introductive

- Cinematica punctului material studiază mişcarea mecanică a punctelor materiale, fără a se tine cont de masele şi forţele ce acţionează asupra lor.
- Mişcarea punctelor materiale se raportează la un reper de care se consideră fixat un anumit sistem de referinţă.
- Reperul (sistemul de referinţă) poate fi fix sau mobil.
- În raport cu reperul fix, mişcarea punctului material se numeşte mişcare absolută, iar în raport cu reperul mobil, mişcarea se numeşte mişcare relativă.

Punctul Material

Un punct material reprezintă un corp ale cărui dimensiuni pot fi neglijate.

Punctul material în mișcare este denumit mobil, iar totalitatea punctelor succesive prin care trece mobilul în decursul mișcării sale formează traiectoria acestuia.



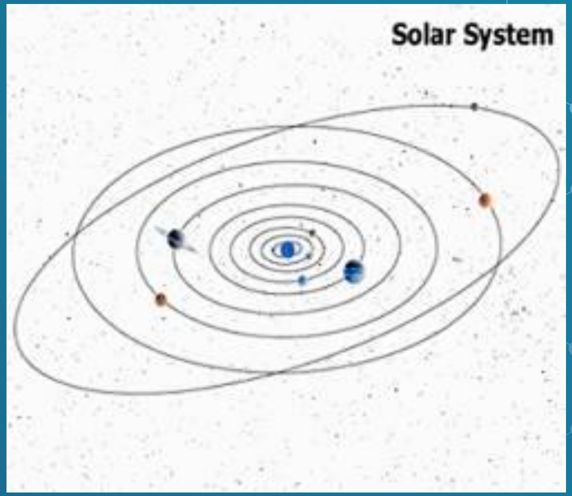
Cinematica

Cinematica este o ramura a mecanicii clasice ce se ocupă cu studiul mișcării obiectelor fără a lua în considerație cauza ce duce la această mișcare. Cinematica nu trebuie confundată cu altă ramură a mecanicii clasice, dinamica (care studiază relația între mișcarea obiectelor și cauza care o determină).

Posibilitatea acestei neglijări depinde de condițiile concrete ale diferitor probleme studiate. Astfel, planetele pot fi considerate puncte materiale când se studiază mișcarea lor în jurul Soarelui.

Exemplu

Miscarea planetelor, de exemplu aceea a Pamantului in jurul Soarelui, are loc sub actiunea fortelor gravitationale dintre cele doua corpuri.Aceasta miscare poate fi studiata fara a lua in considerare rotatia Pamantului in jurul axei sale, si avand in vedere dimensiunile corpurilor in comparatie cu distanta dintre ele, acestea pot fi reprezentate ca doua puncte.

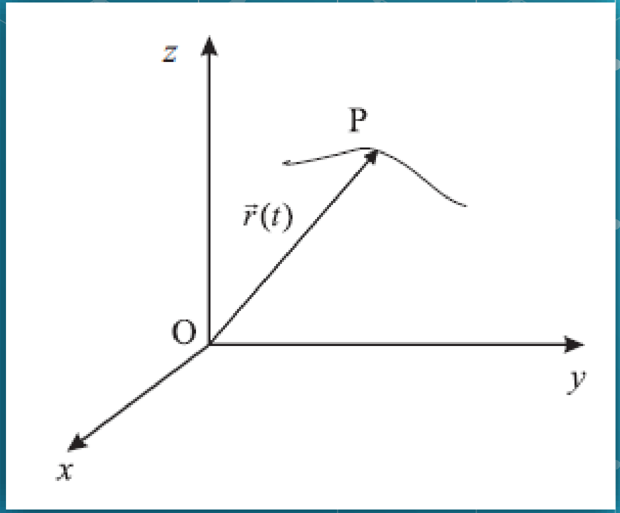


Traiectoria punctului

Se numeşte traiectoria punctului în R mulţimea punctelor din R prin care trece succesiv punctul în mişcare.

Traiectoria este locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de punct în mişcare. Între traiectorie şi curba pe care se deplasează punctul nu există întotdeauna o identitate.

Spre exemplu, pe un cerc, un punct poate parcurge numai un arc sau poate parcurge de mai multe ori cercul.



Viteza si acceleratia liniara a punctului

Se numeşte vector-viteză, sau, pe scurt viteză a punctului P mărimea vectorială definită prin derivata vectorului de poziţie al punctului în raport cu timpul, adică:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Mişcarea unui punct material în care modulul vitezei este constant se numeşte mişcare uniformă.

Se numeşte acceleraţia liniară a punctului P mărimea vectorială definită prin derivata vitezei în raport cu timpul:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Ea caracterizează variaţia vitezei într-un interval de timp elementar.

Viteza areolara si acceleratia areolara

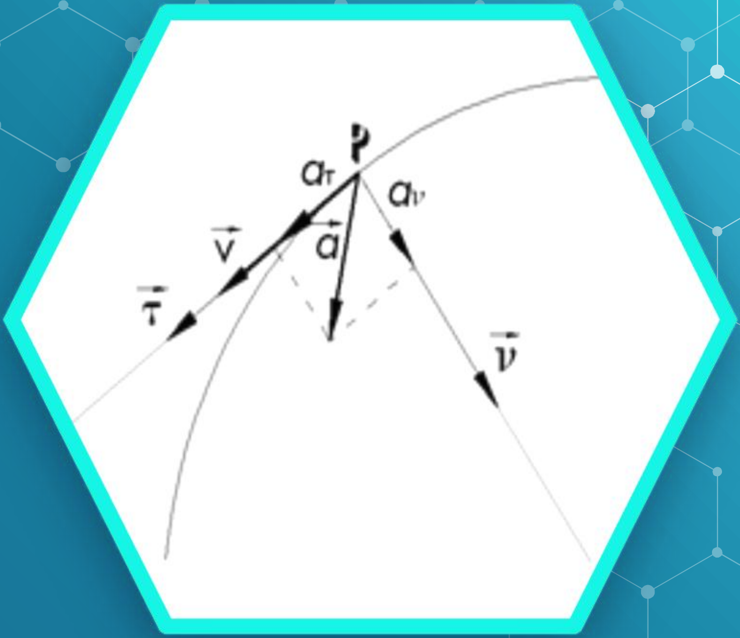
Se numeşte viteză medie areolară mărimea definită prin: $\vec{\Omega}_m = \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Mărimea vectorială egală cu derivata vitezei areolare în raport cu timpul se numeşte acceleraţie areolară.

Acceleraţia areolară se notează cu $\vec{\Gamma}$ şi caracterizează variaţia vitezei areolare în raport cu timpul.

Componentele vitezei si acceleratiei in coordonate naturale

Cele două proiecţii se numesc: a_τ acceleraţie tangenţială, de-a lungul tangentei la traiectorie, notată şi cu a_t, iar a_ν de-a lungul normalei principale, acceleraţie normală, notată şi cu a_n.



Componentele vitezei si acceleratiei in coordonatele carteziene

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}$$

Componentele vitezei si acceleratiei in coordonate polare

$$\vec{v} = \dot{r}\ \vec{\rho} + r\ \dot{\theta}\ \vec{n}$$

$$\vec{a} = \left[\ddot{r} - r\cdot\left(\dot{\theta}\right)^2\right]\vec{\rho} + \left(2\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\right)\vec{n}$$

Componentele vitezei, în coordonate polare sunt: $v_\rho = v_r = \dot{r},\quad v_n = v_\theta = r\dot{\theta}$

$$a_\rho = a_r = \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}\right)^2,\ a_n = a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\ \dot{\theta}\right)$$

Observații

- 1) Acceleraţia unui punct este conţinută în planul osculator al traiectoriei în respectivul punct.
- 2) Dacă, într-un interval de timp, acceleraţia tangentială este nulă, în respectivul interval de timp modulul vitezei este constant, deci mişcarea este uniformă.
- 3) Dacă acceleraţia tangenţială şi viteza au acelaşi sens, rezultă că viteza creşte în valoare absolută şi, în acest caz, mişcarea se numeşte **miscare accelerată**, iar dacă au sensuri diferite **mişcarea** se numeşte **încetinită**.
- 4) Dacă acceleraţia tangenţială este constantă, mişcarea se numeşte **uniform variată.** În condiţiile observaţiei 2, mişcarea este uniform accelerată dacă acceleraţia tangenţială si viteza au acelaşi sens şi uniform încetinită dacă au sensuri contrare.
- 5) Acceleraţia normală este întotdeauna centripetă, pentru că pătratul vitezei şi raza de curbură sunt numere pozitive.

'

Observații

- 6) Dacă acceleraţia normală este nulă şi v nenul (deci are loc, efectiv, o mişcare), rezultă că raza de curbură trebuie să fie infinită, deci traiectoria este rectilinie sau punctul se găseşte într-un punct de inflexiune al traiectoriei.

- 7) Singura mişcare în care acceleraţia este nulă este mişcarea rectilinie şi uniformă, pentru că din $\vec{a}=0$ rezultă $a_\tau = a_\nu = 0$ deci derivata vitezei este nulă, de unde concluzia că modulul vitezei este constant, iar $\frac{1}{R_c}=0$ duce la concluzia că traiectoria este rectilinie.

- 8) Acceleraţia tangenţială se datoreşte variaţiei scalarului vitezei, iar cea normală variaţiei direcţiei vitezei.

Cuprins

Noțiuni introductive

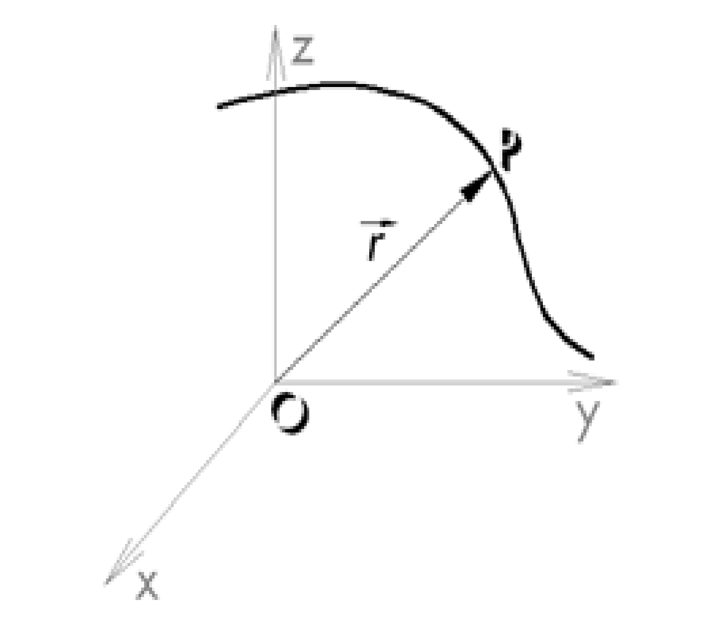
- <u>Cinematica punctului</u> studiază mişcarea mecanică a punctelor materiale, fără a se ține cont de masele şi forțele ce acționează asupra lor.

- <u>Ecuațiile de mişcare</u>:

Mişcarea punctului care se raportează la un sistem de referinţă considerat fix este numită mişcare absolută a punctului, iar mişcarea faţă de un sistem de referinţă mobil se numeşte mişcare relativă a punctului.

A cunoaşte mişcarea unui punct în raport cu un sistem de axe de coordonate înseamnă a cunoaşte, în orice moment, poziţia acestuia faţă de sistemul de referinţă ales.

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$



Viteza liniară a punctului

Se numeşte vector-viteză, sau, pe scurt viteză a punctului P mărimea vectorială definită prin derivata vectorului de poziţie al punctului în raport cu timpul, adică:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$$

Mişcarea unui punct material în care modulul vitezei este constant se numeşte mişcare uniformă.

Accelerația liniară a punctului

Se numeşte acceleraţia liniară a punctului P mărimea vectorială definită prin derivata vitezei în raport cu timpul:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Ea caracterizează variaţia vitezei într-un interval de timp elementar.

Viteza areolară.Accelerația areolară

Se numeşte viteză medie areolară mărimea definită prin:

$$\vec{\Omega}_m = \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Dacă $\Delta t \to 0$ se obține viteza areolară instantanee mărime orientală a ariei elementare măturate de vectorul de poziției raportată la timpul elementar în care aceasta a fost parcursă.
Mărimea vectorială egală cu derivația vitezei areolare în raport cu timpul se numește accelerație areolară.Acceleratia areolară se notează $\vec{\Gamma}$ cu și caracterizează variația vitezei areolare în raport cu timpul.

Concluzii

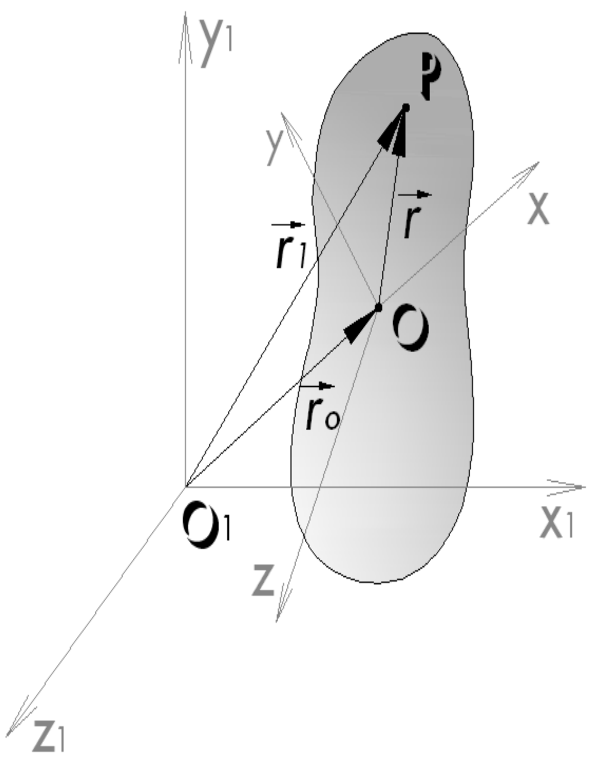
1) Acceleraţia unui punct este conţinută în planul osculator al traiectoriei în respectivul punct.

2) Dacă, într-un interval de timp, acceleraţia tangentială este nulă, în respectivul interval de timp modulul vitezei este constant, deci mişcarea este uniformă.

3) Dacă acceleraţia tangenţială şi viteza au acelaşi sens, rezultă că viteza creşte în valoare absolută şi, în acest caz, mişcarea se numeşte **mişcare accelerată**, iar dacă au sensuri diferite **mişcarea** se numeşte **încetinită.**

Generalităţi

- Pentru studiul mişcării unui solid rigid, se consideră sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$, notat cu $R_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$, unde $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ sunt versorii axelor fixe şi un sistem *Oxyz,* notat cu $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, sistem mobil, solidar legat cu solidul rigid. Faţă de *R,* punctul *P* al solidului rigid are coordonatele *x, y, z,* care rămân constante în timpul mişcării rigidului, pentru că acesta este solidar legat de solid. Faţă de R_1, punctul *P* are coordonatele x_1, y_1, z_1, coodonate variabile.



Viteza și accelerația unghiulară. Formulele lui Poisson

- Pentru calculul vitezei unui punct al solidului, este necesar să se calculeze derivatele versorilor axelor de coordonate mobile în raport cu timpul.
- Proiecțiile derivatelor versorilor pe axele de coordonate:

$$\dot{\vec{i}} \quad (\dot{\vec{i}}\cdot\vec{i},\ \dot{\vec{i}}\cdot\vec{j},\ \dot{\vec{i}}\cdot\vec{k}) \qquad \dot{\vec{j}} \quad (\dot{\vec{j}}\cdot\vec{i},\ \dot{\vec{j}}\cdot\vec{j},\ \dot{\vec{j}}\cdot\vec{k}) \qquad \dot{\vec{k}} \quad (\dot{\vec{k}}\cdot\vec{i},\ \dot{\vec{k}}\cdot\vec{j},\ \dot{\vec{k}}\cdot\vec{k})$$

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\vec{j}}\cdot\vec{k} = -\vec{j}\cdot\dot{\vec{k}} \\ \omega_y = \dot{\vec{k}}\cdot\vec{i} = -\dot{\vec{i}}\cdot\vec{k} \\ \omega_z = \dot{\vec{i}}\cdot\vec{j} = -\dot{\vec{j}}\cdot\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\cdot\vec{i} + \omega_y\cdot\vec{j} + \omega_z\cdot\vec{k}$$

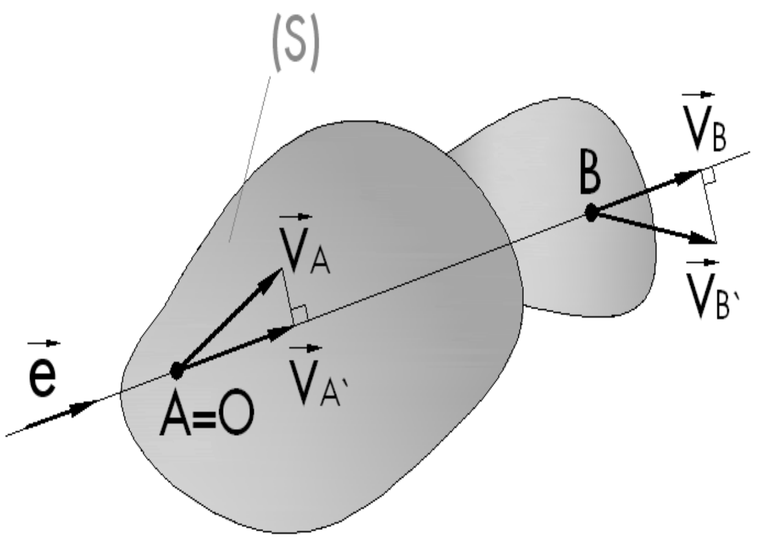
Vector viteză unghiulară instantanee sau viteză de rotație instantanee a rigidului

,

Teorema lui Euler pentru distribuţia de viteze

- Pentru determinarea vitezei unui punct *P* al solidului, în raport cu reperul fix , se derivează ambii membri ai relaţiei în raport cu timpul, adică

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}$$



Distribuţia de acceleraţii în mişcarea solidului rigid

- Pentru determinarea acceleraţiei unui punct oarecare *P* al solidului rigid, se derivează, în raport cu timpul, membru cu membru relaţia dată de teorema lui Euler pentru viteze. Se obţine $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ de unde rezultă $\vec{a} = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. Se notează $\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0$ acceleraţia originii sistemului mobil şi cu $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$

- Se notează $\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0$ acceleraţia originii sistemului mobil şi cu $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$

- Se obţine expresia teoremei lui Euler pentru distribuţia acceleraţiilor într-un solid rigid $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

- Se demonstrează că, în cazul general, poate exista un punct care are acceleraţia nulă . Dacă există, acest punct se numeşte polul acceleraţiilor. Acesta nu este un punct fix al solidului, ci se mişcă odată cu acesta.

Mişcări particulare ale solidului rigid

Mişcarea de translaţie

- Un solid rigid efectuează o mişcare de translaţie dacă o dreaptă oarecare a rigidului rămâne, în tot timpul mişcării, paralelă cu ea însăşi.
- Traiectoriile pe care le descriu punctele solidului pot fi curbe oarecare $\omega_x = 0 \quad \omega_y = 0 \quad \omega_z = 0,\ \text{echivalent cu}\ \vec{\omega} = 0$
- Pentru orice punct al solidului, au loc relaţiile $\vec{v} = \vec{v}_0 \qquad \vec{a} = \vec{a}_0$
- Solidul rigid în mişcare de translaţie are trei grade de libertate.
- Deci, toate punctele unui solid rigid, aflat în mişcare de translaţie, au aceeaşi viteză şi aceeaşi acceleraţie.

Mişcarea de rotaţie

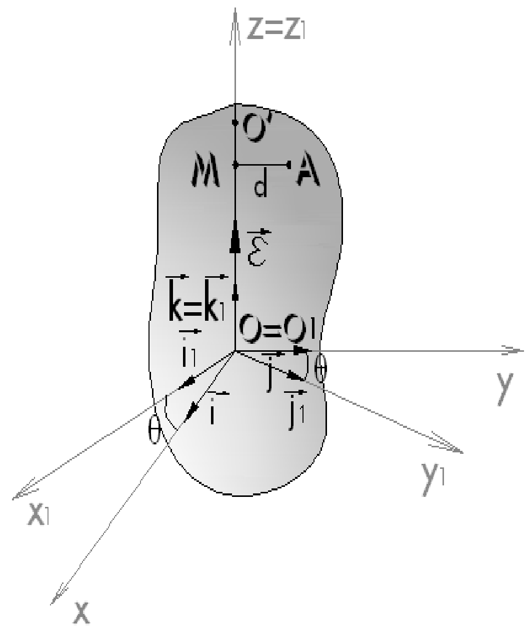
- Un solid rigid se află în mişcare de rotaţie dacă cel două puncte distincte ale sale rămân fixe în spaţiu în tot timpul mişcării.
- Dacă O şi O/ sunt punctele fixe, atunci orice $M \in OO'$ rămâne fix, deci OO/ este o axă fixă şi se numeşte axă de rotaţie. Din acest motiv, mişcarea de rotaţie se numeşte şi mişcarea solidului cu o axă fixă. $\mu\left(x_1Ox\right)=\theta$
- Mişcarea este perfect determinată dacă se cunoaşte mărimea acestui unghi ca funcţie de timp: $\theta=\theta(t)$

$$\vec{v}_0=0 \quad \vec{a}_0=0 \qquad \vec{\omega}=\dot{\theta}\cdot\vec{k}=\omega\cdot\vec{k}$$

şi vectorul acceleraţie unghiulară de

$$\vec{\varepsilon}=\dot{\vec{\omega}}=\dot{\omega}\cdot\vec{k}=\ddot{\theta}\cdot\vec{k}=\varepsilon\cdot\vec{k}$$

- Se face observaţia că alegerea axei Oz a sistemului mobil ca fiind aceeaşi cu axa de rotaţie a corpului a fost făcută doar pentru uşurinţa calculelor.
- În mişcarea de rotaţie a unui solid rigid în jurul unei axe fixe, în orice moment, toate punctele solidului au aceeaşi viteză unghiulară şi aceeaşi acceleraţie unghiulară. $\vec{v}_0=0,\quad \vec{a}_0=0,\quad \vec{\omega}=\omega\cdot\vec{k},\quad \vec{\varepsilon}=\varepsilon\cdot\vec{k}$
- În mişcarea de rotaţie, un punct are viteza nulă dacă şi numai dacă aparţine axei de rotaţie.
- Vitezele sunt conţinute în plane normale pe axa de rotatie Oz.
- Punctele situate pe dreapte paralele cu axa de rotaţie au aceeaşi viteză.



Proprietăţi ale distribuţiei de acceleraţii în mişcarea de rotaţie

- În mişcarea de rotaţie, singurele puncte care au acceleraţia nulă sunt cele care aparţin axei de rotaţie.
- Acceleraţiile sunt conţinute în plane normale pe axa de rotaţie, pentru că $a_z=0$
- Punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rotaţie au acceeaşi accelaraţie (a_x , a_y nu depind de z).
- Pe o dreaptă Δ care întâlneşte axa de rotaţie sub un unghi drept, vectorul acceleraţie variază liniar, modulul vectorului fiind proporţional cu distanţa de la punct la axa de rotaţie, iar direcţia face un unghi constant cu Δ.

Formularea problemelor generale ale dinamicii punctului material

Problemele generale ale dinamicii punctului material liber se împart în:

- problema directă, când se cunosc forţele care acţionează asupra punctului material şi se cere să se studieze mişcarea acestuia;
- problema inversă, când se cunoaşte mişcarea şi se cere forţa care determină această mişcare.

Ecuaţiile diferenţiale de mişcare a punctului material

Ecuaţiile de mişcare se obţin din $\vec{F} = m\,\vec{a}$,

(ecuaţia fundamentală a dinamicii punctului material)

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$$

Forţe existente

1) forţa de interacţiune gravitaţională (forţa atracţiei universale), descoperită în 1687 de către Galilei, care se referă la interacţiunea a două mase. Astfel, pentru două puncte materiale, de mase m şi M, situate în punctele M_1 şi M_2, expresia forţei de interacţiune dintre cele două puncte este

$$\vec{F} = -f\,\frac{mM}{{M_1M_2}^3}\,\overrightarrow{M_1M_2} = -f\,\frac{mM}{r^3}\,\vec{\rho},$$

cu f constanta atracţiei universal.

2) forţa centrală, dată de expresia

$$\vec{F} = -k\vec{r},$$

Ecuaţiile diferenţiale de mişcare a punctului material în diferite sisteme de coordonate

Ecuaţia fundamentală a dinamicii, in coordonate cilindrice:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_\rho(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}, t) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_n(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} = F_z(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}, t) \end{cases}$$

In coordonate naturale:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(s, \dot{s}, t) \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_\nu(s, \dot{s}, t) \\ 0 = F_\beta(s, \dot{s}, t) \end{cases}$$

Noţiuni fundamentale ale dinamicii punctului material

- <u>Impulsul punctului material sau cantitatea de mişcare</u> = mărimea vectorială care caracterizează mişcarea mecanică a unui punct în ce priveşte capacitatea ei de a se transmite unui sistem material tot sub formă de mişcare mecanică, mărime care se exprimă prin produsul dintre masă şi viteza punctului material,.

$$\vec{H} = m \cdot \vec{v}$$

- <u>Momentul cinetic al unui punct material faţă de un punct</u> = (pol) momentul impulsului punctului material faţă de respectivul pol.

$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

Se numeşte <u>lucrul mecanic elementar</u> al forţei $\vec{F}$ produsul scalar dintre forţa $\vec{F}$ şi deplasarea elementară $d\vec{r}$ a vectorului de poziţie al punctului material

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \delta L = \left(F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z \right) \, dt$$

- <u>Lucrul mecanic</u> (total) al forţei se calculează după formula $L_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z dz)$

- <u>Funcţia scalară</u> de coordonatele unui punct, al cărei gradient este egal cu forţa care acţionează asupra acestui punct, se numeşte funcţie de forţă.

$$L_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_B - U_A$$

- Prin definiţie, <u>energia potenţială</u> este lucrul mecanic dezvoltat de forţa conservativă prin revenirea punctului la poziţia iniţială $V = -L_{AB} = -U(x, y, z)$

Suma dintre energia cinetică şi energia potenţială a punctului material se numeşte <u>energie mecanică</u>. $E_m = E + V$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Teorema impulsului

Derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta $\vec{F}$ a forţelor care acţionează asupra acestui punct $\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{F}$

Teorema momentului cinetic

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material, calculat faţă de un pol O, este egală cu momentul rezultantei $\vec{F}$ al forţelor care acţionează asupra punctului material, moment calculat în raport cu acelaşi pol O. $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$

Teorema energiei cinetice şi a lucrului mecanic

Variaţia energiei cinetice a unui punct material este egală cu lucrul mecanic elementar al rezultantei $\vec{F}$ a forţelor care acţionează asupra punctului material $dE = \delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Teorema energiei mecanice

Într-un sistem inerţial, variaţia energiei mecanice a unui punct material între două momente este egală cu suma lucrurilor mecanice ale forţelor neconservative aplicate punctului material între cele două momente.

Teoreme de conservare

Dacă momentul forţei rezultante $\vec{F}$ în raport cu o axă este nul, atunci momentul cinetic în raport cu această axă se conservă, respectiv proiecţia punctului pe un plan normal pe axă are, în acest plan, o mişcare cu viteză areolară constantă. $E_m = E + V = C$ unde E_m este energia mecanică a punctului material.

Formularea problemelor generale ale dinamicii punctului material

Problemele generale ale dinamicii punctului material liber se împart în:

- problema directă, când se cunosc forţele care acţionează asupra punctului material şi se cere să se studieze mişcarea acestuia;
- problema inversă, când se cunoaşte mişcarea şi se cere forţa care determină această mişcare.

Ecuaţiile diferenţiale de mişcare a punctului material

Ecuaţiile de mişcare se obţin din $\vec{F} = m\,\vec{a}$,

(ecuaţia fundamentală a dinamicii punctului material)

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$$

Forţe existente

1) forţa de interacţiune gravitaţională (forţa atracţiei universale), descoperită în 1687 de către Galilei, care se referă la interacţiunea a două mase. Astfel, pentru două puncte materiale, de mase m şi M, situate în punctele M_1 şi M_2, expresia forţei de interacţiune dintre cele două puncte este

$$\vec{F} = -f\frac{mM}{M_1M_2^{\;3}}\overrightarrow{M_1M_2} = -f\frac{mM}{r^3}\vec{\rho}$$,

cu f constanta atracţiei universal.

2) forţa centrală, dată de expresia

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$,

Ecuaţiile diferenţiale de mişcare a punctului material în diferite sisteme de coordonate

Ecuaţia fundamentală a dinamicii, in coordonate cilindrice:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_\rho(r,\theta,z,\dot{r},\dot{\theta},\dot{z},t) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_n(r,\theta,z,\dot{r},\dot{\theta},\dot{z},t) \\ m\ddot{z} = F_z(r,\theta,z,\dot{r},\dot{\theta},\dot{z},t) \end{cases}$$

In coordonate naturale:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(s,\dot{s},t) \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_\nu(s,\dot{s},t) \\ 0 = F_\beta(s,\dot{s},t) \end{cases}$$

Noţiuni fundamentale ale dinamicii punctului material

- Impulsul punctului material sau cantitatea de mişcare = mărimea vectorială care caracterizează mişcarea mecanică a unui punct în ce priveşte capacitatea ei de a se transmite unui sistem material tot sub formă de mişcare mecanică, mărime care se exprimă prin produsul dintre masă şi viteza punctului material,.

$\vec{H} = m \cdot \vec{v}$

- Momentul cinetic al unui punct material faţă de un punct = (pol) momentul impulsului punctului material faţă de respectivul pol.

$\vec{K}_0 = \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$

Se numeşte lucrul mecanic elementar al forţei $\vec{F}$ produsul scalar dintre forţa $\vec{F}$ şi deplasarea elementară $d\vec{r}$ a vectorului de poziţie al punctului material

$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \delta L = \left(F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z\right) \; dt$

- Lucrul mecanic (total) al forţei se calculează după formula $L_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z dz)$

- Funcţia scalară de coordonatele unui punct, al cărei gradient este egal cu forţa care acţionează asupra acestui punct, se numeşte funcţie de forţă.

$L_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_B - U_A$

- Prin definiţie, energia potenţială este lucrul mecanic dezvoltat de forţa conservativă prin revenirea punctului la poziţia iniţială $V = -L_{AB} = -U(x, y, z)$

Suma dintre energia cinetică şi energia potenţială a punctului material se numeşte energie mecanică. $E_m = E + V$

Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Teorema impulsului

Derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta $\vec{F}$ a forţelor care acţionează asupra acestui punct $\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{F}$

Teorema momentului cinetic

Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material, calculat faţă de un pol O, este egală cu momentul rezultantei $\vec{F}$ al forţelor care acţionează asupra punctului material, moment calculat în raport cu acelaşi pol O. $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$

Teorema energiei cinetice şi a lucrului mecanic

Variaţia energiei cinetice a unui punct material este egală cu lucrul mecanic elementar al rezultantei $\vec{F}$ a forţelor care acţionează asupra punctului material $dE = \delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Teorema energiei mecanice

Într-un sistem inerţial, variaţia energiei mecanice a unui punct material între două momente este egală cu suma lucrurilor mecanice ale forţelor neconservative aplicate punctului material între cele două momente.

Teoreme de conservare

Dacă momentul forţei rezultante $\vec{F}$ în raport cu o axă este nul, atunci momentul cinetic în raport cu această axă se conservă, respectiv proiecţia punctului pe un plan normal pe axă are, în acest plan, o mişcare cu viteză areolară constantă. $E_m = E + V = C$ unde E_m este energia mecanică a punctului material.

CUPRINS

1.5.1.1 Formularea problemelor generale ale dinamicii punctului material

Problemele generale ale dinamicii punctului material liber se împart în:

problema directă, când se cunosc forțele care acționează asupra punctului material și se cere să se studieze mișcarea acestuia;

problema inversă, când se cunoaște mișcarea și se cere forța care determină această mișcare.

1.5.1.2 Ecuațiile și forțele de mișcare a punctului material

- **Ecuațiile de mișcare** se obțin din următoarea formulă, numită și ecuația fundamentală a dinamicii punctului material.

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

- **Forțele de mișcare**

Câteva exemple de astfel de forțe sunt:

1. Forța de interacțiune gravitațională (forța atracției universale), descoperită în 1687 de către Galilei, care se referă la interacțiunea a două mase.

$$\vec{F} = -f\frac{mM}{M_1M_2^{\,3}}\overrightarrow{M_1M_2} = -f\frac{mM}{r^3}\vec{\rho}$$

1.5.1.2 Ecuațiile și forțele de mișcare a punctului material

2. Forța centrală, dată de expresia: $\vec{F} = -k\vec{r}$

3. Forța de rezistență a aerului: $\vec{F} = -f(\vec{v})\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

4. Forța reactivă care acționează asupra unei rachete din momentul lansării până se termină arderea combustibilului:

$$F = \alpha - \beta t$$

1.5.1.3 Noțiuni fundamentale ale dinamicii punctului material

Mărimea vectorială care caracterizează mișcarea mecanică a unui punct în ce privește capacitatea ei de a se transmite unui sistem material tot sub formă de mișcare mecanică, mărime care se exprimă prin produsul dintre masă și viteza punctului material, se numește impulsul punctului material sau cantitatea de mișcare .

$$\vec{H} = m \cdot \vec{v}$$

Se numește **momentul cinetic** al unui punct material față de un punct (pol) momentul impulsului punctului material față de respectivul pol.

$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

Se numește **lucrul mecanic** elementar al forței produsul scalar dintre forța și deplasarea elementară a vectorului de poziție al punctului material.

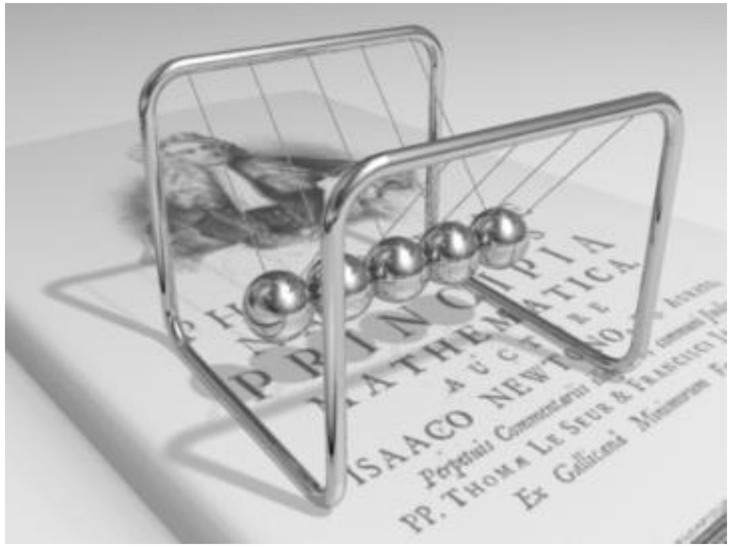
1.5.1.4 Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Teorema impulsului - Derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta a forțelor care acționează asupra acestui punct.

Teorema momentului cinetic - Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material, calculat față de un pol O, este egală cu momentul rezultantei al forțelor care acționează asupra punctului material, moment calculat în raport cu același pol O.

Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic - Variația energiei cinetice a unui punct material este egală cu lucrul mecanic elementar al rezultantei a forțelor care acționează asupra punctului material.

Teorema energiei mecanice - Într-un sistem inerțial, variația energiei mecanice a unui punct material între două momente este egală cu suma lucrurilor mecanice ale forțelor neconservative aplicate punctului material între cele două momente.



1.5.1.4 Teoremele generale ale dinamicii punctului material

Teoreme de conservare - Dacă rezultanta a forțelor care acționează asupra punctului material este nulă, impulsul unui punct material se conservă.

Dacă momentul forței rezultante în raport cu o axă este nul, atunci momentul cinetic în raport cu această axă se conservă, respectiv proiecția punctului pe un plan normal pe axă are, în acest plan, o mișcare cu viteză areolară constantă.

unde E_m este energia mecanică a punctului material.

$$E_m = E + V = C$$

Cuprins

1. Noțiuni fundamentale ale dinamicii sistemelor de puncte și a solidului rigid. Definiții

Solidul rigid este o idealizare folosită pentru descrierea comportării mecanice a corpurilor pentru care deformarea este neglijabilă. Modelul solidului rigid nu se aplică în mecanica relativistă.

Comportamentul dinamic al unui rigid în mişcare este condiţionat de trei categorii de mărimi mecanice, denumite caracteristici mecanice.

- caracteristicile inerţiale ale rigidului, care pun în evidenţă influenţa fenomenului de inerţie a substanţei în desfăşurarea proceselor mecanice
- caracteristicile cinetice ale unui rigid, care caracterizează din punct de vedere dinamic mişcarea rigidului,, a capacităţii substanţei de a-şi transforma starea de mişcare, sau, în anumite condiţii de a-şi păstra starea de mişcare;
- caracteristicile dinamice ale unui rigid sunt mărimi mecanice care, caracterizează interacţiunile lui cu alte corpuri din mediul înconjurător, evidenţiind influenţa acestor interacţiuni asupra evoluţiei stării de mişcare a rigidului.

Dinamica studiază mişcarea corpurilor rigide sub acţiunea forţelor exterioare aplicate acestora. Problema fundamentală a dinamicii este de a determina legile de mișcare ale unui corp pe baza cunoașterii forțelor care acţionează asupra acestuia.

Corpul rigid este un element important în tehnică şi semnifică un corp material în formă fixă, compus din particule elementare pentru care distanţa dintre oricare două puncte ale sale nu se modifică în timp şi în spaţiu.

Translaţiile pot fi:

- rectilinii: mişcarea unui piston în interiorul unui cilindru, mişcarea cabinei unui ascensor, mişcarea sertarului unei mese;
- circulare: mişcarea scaunului unui scrânciob, miscarea bilei de cuplare a două roţi cu axe fixă
- alte tipuri de translaţii: translaţia cicloidală – la biela de cuplare a roţilor unei locomotive etc.

1.1 Calculul impulsului

Fiind dat un sistem de puncte materiale $S=(M_i)$, de mase m_i şi viteze , se numeşte impulsul sistemului S suma impulsurilor punctelor sistemului, adică

$$\vec{H}(S)=\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{H} = M\, \vec{v}_C$$

Impulsul unui sistem de puncte materiale este egal cu impulsul unui punct material, având masa egală cu masa întregului sistem, situată în centrul de masă al sistemului.

1.2 Calculul momentului cinetic

1) Pentru mişcarea de translaţie

Un corp solid rigid efectuează o mișcare de translație dacă punctele ce aparțin corpului se mișcă pe traiectorii paralele.

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times M\,\vec{v}_C$$

2) Pentru mişcarea de rotaţie (sistemul cu o axă fixă)

Un solid rigid are o mişcare de rotație, dacă în timpul mişcării două puncte ale rigidului rămân fixe în spațiu.

$$K_x = -\omega J_{xz}\,;\; K_y = -\omega J_{yz}\,;\; K_z = \omega J_z$$

Pendulul Maxwell

https://www.youtube.com/watch?v=8Ch9TDeW1FU

1.3 Calculul energiei cinetice

1) Pentru mişcarea de translaţie, vitezele tuturor punctelor materiale fiind aceleaşi, egale cu viteza centrului de masă. Se scrie:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_C^2 = \frac{1}{2} M v_C^2$$

2) Pentru sistemul de puncte materiale în mişcare de rotaţie

$$E = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

3) Pentru sistemul de puncte materiale cu un punct fix (solidul cu un punct fix)

$$E = \frac{1}{2}\omega_x^2 J_x + \frac{1}{2}\omega_y^2 J_y + \frac{1}{2}\omega_z^2 J_z - J_{yz}\omega_y\omega_z - J_{zx}\omega_z\omega_x - J_{xy}\omega_x\omega_y$$

4) Pentru rigid în mişcare generală

$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

2. Teoreme generale ale dinamicii sistemelor de puncte materiale

→ **Teorema impulsului**

Derivata în raport cu timpul a impulsului unui sistem de puncte materiale este egală cu vectorul rezultant al forţelor exterioare.

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

→ **Teorema centrului de masă**

Centrul maselor unui sistem de puncte materiale are aceeaşi mişcare ca a unui punct material care are masa egală cu masa întregului sistem şi asupra căruia acţionează o forţă egală cu vectorul rezultant al forţelor exterioare.

$$M\,\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

→ **Teoremele momentului cinetic**

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale în raport cu un punct fix O este egal cu suma dintre momentul cinetic al centrului de masă, şi momentul cinetic în mişcarea relativă a sistemului în raport cu centrul de masă.

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times M\vec{v}_C + \vec{K}'$$

→ **Teoremele energiei cinetice şi a lucrului mecanic**

Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale, este egală cu suma dintre energia cinetică a centrului de masă şi energia cinetică în mişcarea relativă a sistemului în raport cu centrul de masă.

$$E = \frac{1}{2} M\, v_C^2 + E'$$

Carte in format electronic.

TECHNIUM BOOKS

ISBN 987-606-95069-9-8